

Université de Montréal

Les instabilités magnétohydrodynamiques dans EULAG-MHD

par
Nicolas Lawson

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

Octobre, 2014

© Nicolas Lawson, 2014.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Les instabilités magnétohydrodynamiques dans EULAG-MHD

présenté par:

Nicolas Lawson

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

David Lafrenière,	président-rapporteur
Paul Charbonneau,	directeur de recherche
Gilles Fontaine,	membre du jury

Mémoire accepté le: 16 Octobre 2014

RÉSUMÉ

Les mécanismes qui entretiennent le cycle magnétique solaire sont encore aujourd'hui relativement mal compris. Entre autres, certains travaux suggèrent la présence d'instabilités magnétohydrodynamiques qui pourraient avoir une influence significative sur la période du cycle par leur capacité à accélérer la destruction des structures magnétiques à grandes échelles. Nous analysons la présence des instabilités au sein des simulations effectuées à l'aide du modèle EULAG-MHD en utilisant premièrement une méthodologie basée sur un proxy spécifique associé à l'instabilité et en le comparant à un proxy similaire, mais pour le cycle magnétique solaire observé dans notre modèle. Cette méthodologie fait ressortir une évolution temporellement cyclique du proxy de l'instabilité avec des amplitudes similaires au proxy du cycle magnétique, mais présentant un léger déphasage. Nous poursuivons cette analyse en appliquant une méthode se basant sur le découpage de "zones instables" via le critère de Tayler dans la zone stable de notre modèle. L'application expose une migration équatoriale d'une zone instable qui débute à très hautes latitudes aux pôles, passe par le champ toroïdal classique, accélère et atteint l'équateur. Cette zone instable semble accélérer la destruction du champ magnétique présent, laissant place au nouveau champ pour la prochaine demie-période du cycle. La combinaison de ces deux analyses permet d'énoncer un scénario plausible qui inclut les effets d'une telle instabilité sur le cycle magnétique ainsi que sur la stabilité globale de notre simulation. Dans ce scénario, il est important de noter que les inversions de polarités semblent indépendantes de cette instabilité, qui ne ferait qu'accélérer le processus de destruction du champ déjà en place.

Mots clés: Instabilités, Magnétohydrodynamique, Cycle magnétique solaire.

ABSTRACT

Even today, the physical mechanisms generating the solar magnetic cycle are not yet fully understood. Recent research has suggested that magnetohydrodynamical (MHD) instabilities could be present and perhaps have a significant influence on the magnetic cycle period through their ability to accelerate the destruction of established large scale magnetic fields. In the present work, we investigate the existence and operation of an instability operating within an EULAG-MHD simulation of solar convection. We define a magnetic energy-based proxy designed to be sensitive to the growth of the MHD instability suspected to develop in the simulation, and compare its temporal behavior to another energy-based proxy characterizing the primary large-scale magnetic cycle. Both proxies show phase-lagged cyclic behavior with similar amplitudes. We follow up on this analysis by applying another method based on the identification of "unstable zones" inside our convectively stable layer, using a known linear stability criterion for the so-called "Taylor instability". The application of this stability criterion reveals an equatorward migration of a small unstable zone that starts at very high latitudes at each pole, crosses the zonal bands of strong toroidal magnetic field building up in the simulation, and accelerates towards the equator. This "instability front" appears to accelerate the destruction of the established magnetic field and thus facilitates polarity reversal and the buildup of the opposite polarity magnetic field for the subsequent half-period of the cycle. The combination of both types of analyses enables us to propose a plausible dynamo scenario that includes the effects of this instability on the magnetic cycle as well as on the global stability of our simulation. In the context of this scenario, it must be emphasized that the polarity inversions per se are not driven by the instability, which only supports the polarity reversals process by means of accelerated destruction of the established large-scale magnetic field.

Keywords: Instabilities, Magnetohydrodynamics, Solar magnetic cycle.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iii
ABSTRACT	iv
TABLE DES MATIÈRES	v
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES SIGLES	viii
REMERCIEMENTS	ix
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION	1
1.1 L'intérêt solaire	1
1.1.1 Caractéristiques physiques	1
1.1.2 Phénomènes magnétiques	2
1.2 Problématique	8
1.2.1 Solution 1 : Héliosismologie et couches solaires	10
1.2.2 Solution 2 : Simulations numériques	13
1.3 Simulation du GRPS : EULAG-MHD	14
1.3.1 Caractéristiques de la simulation	14
1.3.2 Variables reçues	17
1.4 Éléments clés	21
1.4.1 Proxy du cycle solaire	21
1.4.2 Dynamo	24
1.5 Phénomène à l'étude : Instabilités	27
1.6 Contributions	31
CHAPITRE 2 : EVIDENCE OF ACTIVE MHD INSTABILITY INSIDE RA- DIATIVE INTERIOR OF EULAG-MHD MODELS	32

ABSTRACT	33
2.1 Introduction	33
2.2 Simulation characteristics	35
2.2.1 The magnetic field and its cycle	36
2.2.2 The tachocline and overshoot layer	40
2.3 Origin of the magnetic fields in the stable layer	44
2.4 Searching for the signature of instabilities	49
2.4.1 Magnetoshear instability	49
2.5 Digging further: the Tayler instability	53
2.6 Additional numerical experiments and a plausible scenario	57
 CHAPITRE 3 : CONCLUSION	 66
 BIBLIOGRAPHIE	 68

LISTE DES FIGURES

1.1	Graphique de la vitesse angulaire	3
1.2	Magnétogramme de la surface du soleil (MDI/SoHO)	5
1.3	Diagramme "papillon"	7
1.4	Granulation convective de surface	9
1.5	Représentation d'artiste des couches solaires	12
1.6	Vitesses radiales dans EULAG-MHD	19
1.7	Champ magnétique longitudinal dans EULAG-MHD	20
1.8	3e Prix du concours Preuve Par l'Image 2014	22
1.9	Effet dynamo	26
1.10	Un exemple graphique de la "clamshell instability"	30
2.1	Magnetic fields and cycle in EULAG-MHD	37
2.2	Depth structure of flow and magnetic fields in EULAG-MHD . . .	39
2.3	Kinetic energy at every radii	42
2.4	Toroidal magnetic field and EULAG-MHD zone separation	44
2.5	Pointing flux	46
2.6	Pointing flux in time for 3 different shells	46
2.7	Radii-Time representation of the Poynting flux	47
2.8	Instability proxy and magnetic cycle proxy	61
2.9	PFME and rotational energy	62
2.10	Magnetic field lines	63
2.11	Instability criterion compared to the instability proxy	64
2.12	Global wave number change	65

LISTE DES SIGLES

EULAG	EUlerian-LAGrangian
MHD	MagnétoHydroDynamique
MDI/SoHO	Michelson Doppler Imager/Solar and Heliospheric Observatory
GRPS	Groupe de Recherche en Physique Solaire
NCAR	National Center for Atmospheric Research
NAME	Non-Axisymetrical Magnetic Energy
TFME	Toroidal Field Magnetic Energy
PFME	Poloidal Field Magnetic Energy
PKE	Poloidal Kinetic Energy
TKE	Toroidal Kinetic Energy
LHS/RHS	Left/Right Hand Side

REMERCIEMENTS

Je voudrais donner un merci spécial à Paul Charbonneau, mon directeur de recherche, pour m'avoir donné l'occasion de vivre les études graduées dans toutes leurs splendeurs glorieuses. Pour m'avoir motivé quand c'était ennuyant, pour m'avoir soutenu quand c'était dur, mais surtout, pour m'avoir toléré quand c'était impossible.

À ceci je rajoute un remerciement particulier pour ma mère, Sylvie, pour m'avoir montré que même quand tout semble s'écrouler, elle serait toujours là pour moi (même si j'en ressortais légume...)

Un remerciement à Ben (St-Hilaire), pour m'avoir prouvé que le monde n'est pas rempli de [censurés], même si, des fois, on en est convaincu.

Et à FR, parce que grâce à toi, j'avais quelqu'un avec qui être vieux et aigre.

Un remerciement final à ceux qui ne sont pas un cadeau, parce qu'avec des amis comme ça, on n'a pas vraiment besoin d'autre chose. (Je vous ai à l'oeil...)

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 L'intérêt solaire

"E pur si muove !"

"Et pourtant elle bouge !" [lit.]

Ce que Galilée aurait marmonné après s'être fait condamné par l'inquisition pour abjurer la théorie héliocentrique

L'intérêt à comprendre le soleil ne date pas d'hier, ni même du temps de Galilée, mais remonte au début de la prise de conscience de la race humaine. Par contre, même après tant d'années, notre compréhension de cette étoile reste imparfaite, mais se voit améliorée chaque année par la recherche se faisant en physique solaire. Bien que ce mémoire soit centré sur un article à propos de phénomènes très spécifiques présents au cœur du soleil, ce premier chapitre se concentrera sur une large introduction afin de bien contextualiser la recherche effectuée pendant ma maîtrise.

1.1.1 Caractéristiques physiques

Commençons par présenter les principales caractéristiques physiques connues. Le soleil est situé près de 8.3 kpc du centre de la Voie lactée, notre galaxie, et orbite à une vitesse tangentielle de plus de 220000 m/s avec une période de rotation de 220 millions d'années. Il est classifié comme une étoile naine jaune de type spectral G2V évoluant sur la séquence principale. Bien qu'il soit très important pour notre survie, le soleil est une étoile parmi plus de 100 millions d'autres de même type spectral dans la Voie lactée, ce qui le rend bien ordinaire, quoique légèrement plus lumineux que la moyenne de son type.

Son âge actuel est estimé à près de 4.57 milliards d'années, probablement créé par l'effondrement gravitationnel d'un gigantesque nuage de gaz interstellaire déclenché par

des ondes de choc d'une ou plusieurs supernovae voisines. Dans 5 milliards d'années, lorsqu'il aura fini de brûler tout l'hydrogène présent dans son noyau, il grossira lentement pour devenir une géante rouge, englobant potentiellement la terre, et finira sa vie comme une naine blanche, ayant seulement 10% de la masse nécessaire pour devenir une étoile à neutron.

Le rayon solaire a été mesuré à 6.95×10^5 km, englobant une masse totale de 1.99×10^{30} kg représentant à elle seule 99% de la totalité de la masse du système solaire. Cette masse est principalement composée d'un plasma d'hydrogène et d'hélium ionisé, respectivement 74% et 24%, ainsi que de plusieurs autres éléments lourds qui sont présents en très petites quantités. La surface atteint plus de 5700 K, mais on détermine les températures à plus de 15 millions de kelvin en son centre. *Solar Astrophysics* de P. V. Foukal publié en 1990 est un bon outil de référence pour les informations générales résumées ici.

Le soleil est aussi une étoile en rotation. À cause de la convection qui est présente dans les 30% supérieurs du rayon solaire, cette rotation est de type différentielle, à la différence d'une rotation solide comme une boule de billard. La rotation différentielle implique que la vitesse angulaire dépend des latitudes et du rayon. Effectivement, on observe une vitesse angulaire plus rapide à l'équateur (2.1×10^{-6} radians/s) qu'aux pôles (2.8×10^{-6} radians/s). La période de rotation moyenne est mesurée à 27 jours terrestres. Ce type de rotation n'est présent que pour la couche supérieure du soleil. Sous 70% du rayon, la rotation change de type et devient une rotation solide. La différence entre ces deux types de rotation crée une section affectée par un changement radical de comportements qui a pris le nom de tachocline ([25] ;[12]). Voir Fig. 1.1.

1.1.2 Phénomènes magnétiques

Comme plusieurs autres étoiles dans notre galaxie, le soleil est une étoile mettant en scène plusieurs phénomènes magnétiques. De manière générale, ces phénomènes sont beaucoup plus difficiles à expliquer et encore aujourd'hui font couler beaucoup d'encre autant dans le cas du soleil que des autres étoiles. Heureusement, le soleil est beaucoup plus proche de la terre et conséquemment son observation produit des données qui

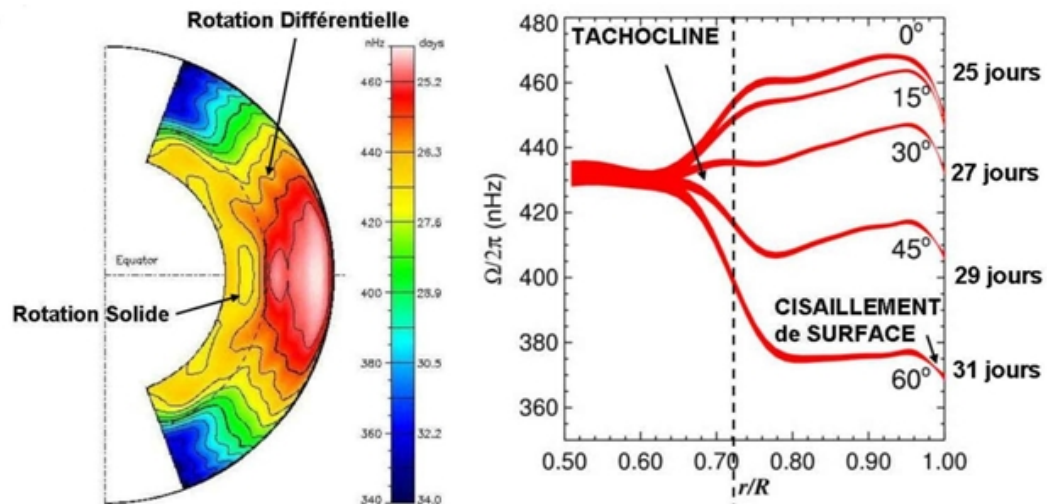


Figure 1.1 – Graphique représentant la vitesse angulaire en profondeur du soleil. À gauche, on voit la vitesse angulaire sur une tranche du soleil avec l'axe de rotation à la verticale avec les pôles lents au haut en bas ainsi que l'équateur rapide au centre. On remarque aussi la rotation solide dans la zone stable, représenté par la couleur jaune relativement uniforme. À droite, on trace la période pour différentes latitudes (0, 15, 30, 45, 60) pour un rayon allant de 50% à 100% du rayon solaire. On remarque un changement de période (plus grande pour les latitude proche des pôles et plus petite pour celles proche de l'équateur) lorsqu'on passe la tachocline à 70% du rayon solaire. Tiré de http://irfu.cea.fr/Sap/Phoce/Vie_des_labos/Ast/ast_visu.php?id_ast=1283 en date du 10 juillet 2014

contiennent considérablement plus d'informations et de détails.

Le fait qu'il soit facilement observable a aussi eu comme effet que son étude scientifique légitime a commencé beaucoup plus tôt que les autres astres. Effectivement, l'étude des phénomènes magnétiques bien documentés commence avec les dessins de Galilée de taches solaires et les historiens ont retracé d'autres observations faites il y a de cela presque 2000 ans. Ces taches solaires sont, sans nul doute, le phénomène magnétique le plus connu exhibé par le soleil et elles témoignent d'une activité magnétique considérable dissimulée en son centre. Depuis Galilée, elles ont attiré le regard de plusieurs pionniers de la physique solaire, jusqu'à les rendre aveugles, littéralement. On voit un exemple de tache solaire observée par l'instrument MDI/SoHO à l'image Fig. 1.2.

L'assombrissement des taches solaires (voir Fig. 1.4) est dû au fait que leur centre est plus froid que le plasma environnant, atteignant des températures de 3000 à 4500 kelvins en comparaison avec la température environnante de surface de 5700 kelvins. La raison pour ce refroidissement est qu'une tache est le siège d'un très fort champ magnétique, de l'ordre de 0.1 T, qui inhibe la convection et diminue le transport de chaleur venant du centre, refroidissant donc la tache. On en observe de plusieurs tailles différentes, mais la majorité se situent entre 1500 et 50000 km, ce qui est comparable à la taille de la terre. De plus, leur durée de vie passe de quelques heures à quelques jours, atteignant jusqu'à quelques semaines pour les plus grosses. Tout ceci fait en sorte qu'elles sont régulièrement visibles à l'œil nu de la surface de la Terre ! D'ailleurs, les historiens ont retrouvé 2000 ans d'observations de taches solaires effectuées à l'œil nu provenant de la cour impériale de Chine, car elles y étaient utilisées à des fins astrologiques.

On utilise aussi des magnétogrammes pour observer ces taches, comme à la figure 1.2. Ces images sont des cartes magnétiques se servant souvent de l'effet Zeeman afin de représenter graphiquement les variations spatiales d'intensité du champ magnétique de surface. Ces magnétogrammes ont permis d'identifier que les taches solaires n'ont pas un comportement complètement aléatoire, mais semblent respecter quelques tendances globales. Premièrement, les taches solaires apparaissent en paires, une avec un champ magnétique entrant et une avec un champ magnétique sortant. Les deux taches de chaque paire forment les extrémités d'un segment ayant un léger angle par rapport

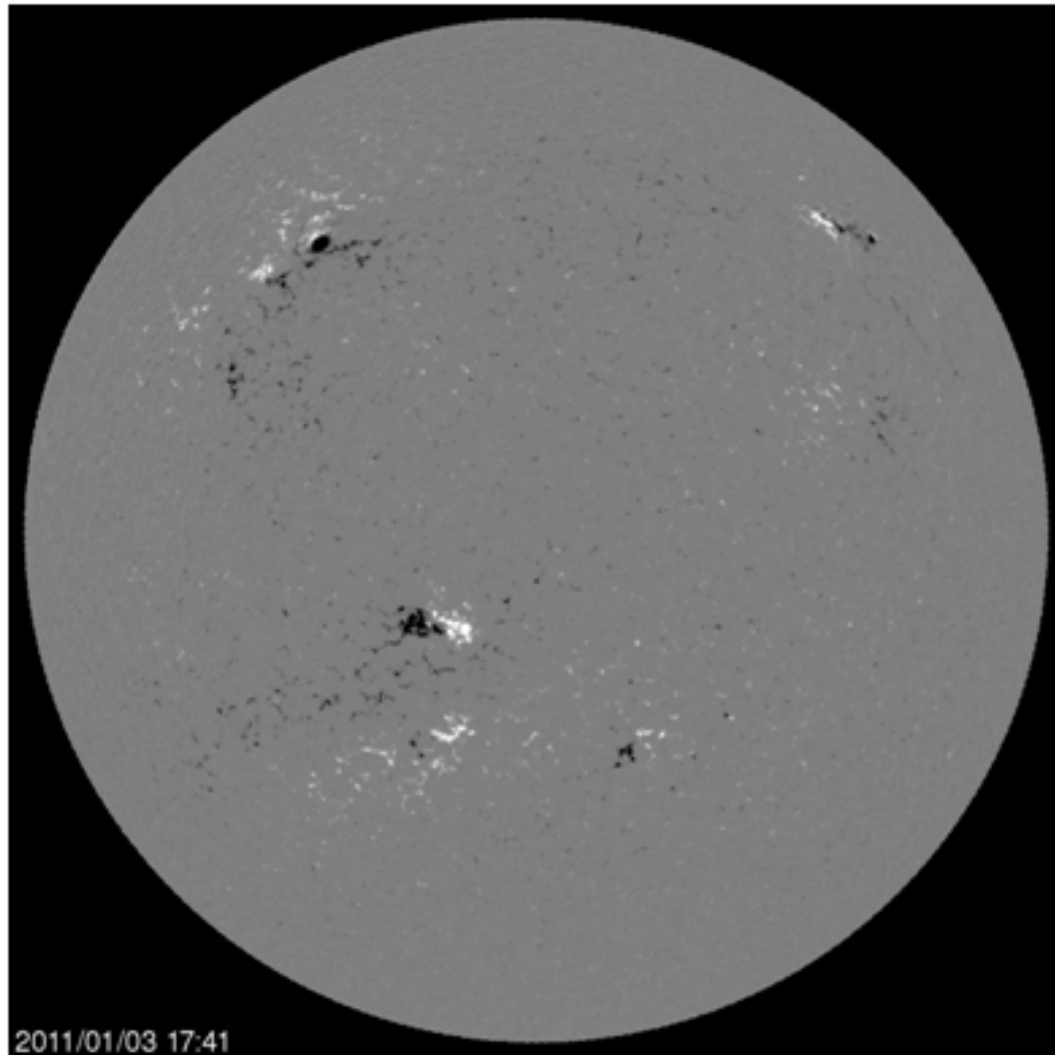


Figure 1.2 – Magnétogramme de la surface du soleil pris par l'instrument MDI/SoHO. On utilise une projection satellite de la sphère solaire avec l'axe de rotation du soleil vertical, l'équateur se trouvant à l'horizontal. Le blanc représente un champ magnétique sortant et le noir un champ magnétique entrant. On peut remarquer la présence de taches solaire en paires de signe opposé ainsi que leur inversion de polarité dans chaque hémisphère. tiré de http://sohowww.nascom.nasa.gov//data/REPROCESSING/Completed/2011/mdimag/20110103/20110103_1741_mdimag_512.jpg

à l'équateur. De plus, l'ordre des paires est presque toujours identique dans l'entièreté d'un hémisphère, mais inversée dans l'autre de manière antisymétrique face à l'équateur. Ces "règles", nommées les lois de polarités de Hale, suggèrent fortement qu'il existe une configuration interne aux grandes échelles qui domine le comportement des taches aux petites échelles.

Dans le temps, les taches ont aussi un comportement cyclique bien spécial. Au début du cycle, leur apparition est située aux plus hautes latitudes, près des pôles, mais plus le temps avance, plus elles apparaissent proches de l'équateur. La tache elle-même ne bouge pas au cours de sa vie, mais celles qui émergeront plus tard seront de plus en plus proche de l'équateur. À noter, leur quantité augmente aussi significativement pendant cette migration. Après onze ans, le cycle s'inverse et elles recommencent à apparaître aux hautes latitudes, mais la polarité magnétique des paires de taches est inversée dans chaque hémisphère. C'est ce cycle de onze ans que l'on retrouve régulièrement dans les fameux diagrammes papillon (Fig. 1.3).

Le soleil exhibe plusieurs autres phénomènes magnétiques, comme les éruptions et les protubérances solaires, mais pour les fins de cette introduction, je désire en présenter un petit dernier : le champ magnétique dipolaire. De manière très similaire à la terre, le soleil produit aussi un champ magnétique significatif de forme dipolaire, ce qui est tout à fait attendu dans le contexte d'étoiles actives magnétiquement. Ce qui rend ce phénomène magnétique particulièrement intéressant est qu'il évolue sur une échelle de grandeur beaucoup plus grande que celle des taches solaires, mais il s'inverse lui aussi au rythme d'un cycle magnétique d'une demie-période de onze ans. Ceci suggère donc que les phénomènes magnétiques que l'on observe ne sont que les conséquences d'autres phénomènes évoluant dans les couches plus profondes du soleil, encore invisibles pour le moment. L'ensemble de ces phénomènes serait donc l'unique moteur de toute l'activité magnétique observable et serait capable de produire des effets sur une grande gamme d'ordres de grandeur. Ce mémoire s'attaquera donc à un aspect bien spécifique de ce moteur qui mènera à une meilleure compréhension de l'évolution de ces phénomènes mystérieux. Pour plus d'informations sur le cycle solaire de 11 ans, consultez l'article de revue de D. H. Hathaway [23].

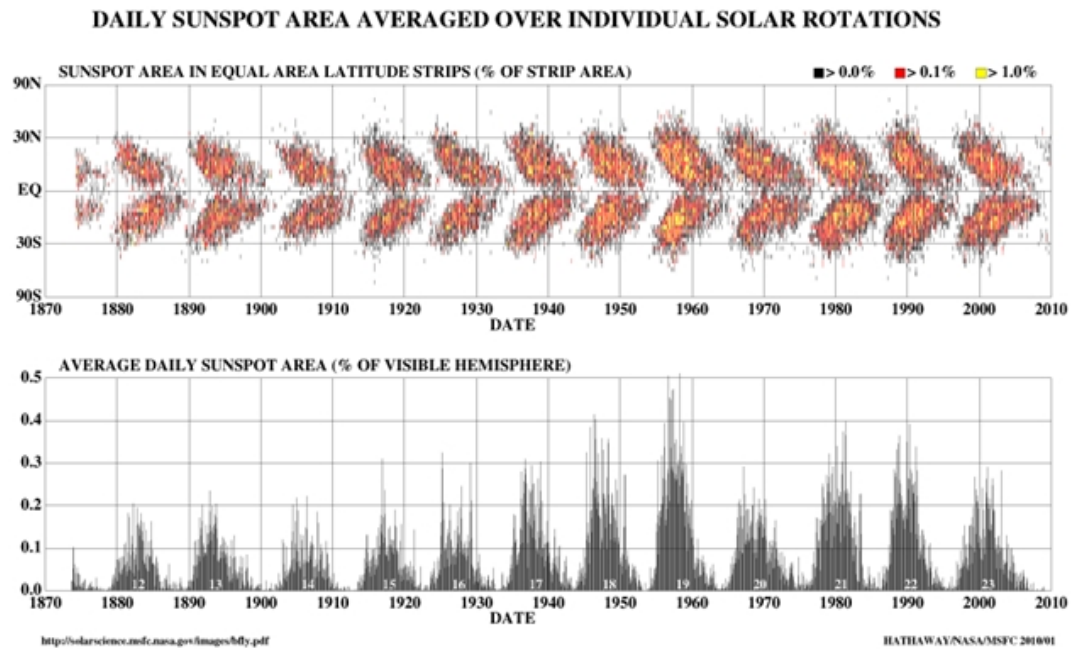


Figure 1.3 – Deux diagrammes exposant le cycle solaire de 11 ans. En haut, on montre le pourcentage par code couleur de l'aire de la bande latitudinale visible couverte de taches solaires pour chaque latitude dans le temps. On peut voir clairement la migration vers l'équateur de l'apparition des taches ainsi que l'augmentation de leur nombre au cours du cycle. Cette forme est ce qui a donné à ce type de graphique le nom de "papillon". En bas, un graphique similaire, mais qui donne le pourcentage de la surface totale couverte de taches solaires dans le temps au lieu des bandes latitudinales. Tiré de <http://solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2010-3/fulltext.html>

1.2 Problématique

Si le soleil est si proche, si lumineux et si facilement observable, pourquoi ne suffit-il pas de simplement mieux regarder pour récolter des données sur les phénomènes magnétiques profonds ? Pourquoi avons-nous eu besoin d'attendre les années 90 avant d'avoir une bonne idée de la structure interne totale du soleil ? En fait, les physiciens solaires sont confrontés à une problématique très simple, mais très limitante : l'opacité solaire.

L'information venant du soleil est en très grande majorité emmagasinée dans les photons émis à différentes fréquences. On retrouve aussi d'autres particules qui transportent de l'information, comme les neutrinos, mais celles-ci réagissent souvent très peu avec le milieu baryonique rendant leur détection particulièrement difficile. La densité du soleil est telle qu'un photon émis au centre prendra plus de 170 000 ans à sortir [32], car il sera absorbé et réémis dans une autre direction tout au long de son parcours. En plus de prendre son temps, lorsqu'il sera émis pour la dernière fois près de la surface, il ne contiendra que l'information de sa dernière couche. Il est donc très difficile d'avoir de l'information sur l'intérieur du soleil avec les méthodes traditionnelles, d'où l'"opacité" solaire.

Heureusement, on retrouve assez de phénomènes de surface pour alimenter la recherche. On parle entre autres de la rotation différentielle et des taches solaires mentionnées plus tôt, mais aussi la granulation due à la convection, comme on le voit à la Figure 1.4. Des cellules de plasma chaudes réchauffées dans les couches plus profondes du soleil atteignent la surface et se refroidissent en émettant leur énergie thermique en radiation. Le plasma froid redescendra ensuite vers l'intérieur pour se refaire réchauffer. Les cellules chaudes, visibles comme les zones claires, ont une taille moyenne de 1000 km et peuvent atteindre des vitesses latérales de 7 km/s. Lorsqu'elles atteignent la surface, elles ont une durée de vie d'environ 8 à 15 minutes avant qu'elles ne soient complètement refroidies. Avec de telles vitesses, les effets de compression et décompression envoient des ondes sonores significatives au travers du soleil, ce qui permet d'avoir de l'information sur l'intérieur par sismologie, qui dans le cas du soleil prend le nom d'héliosismologie ([12]).

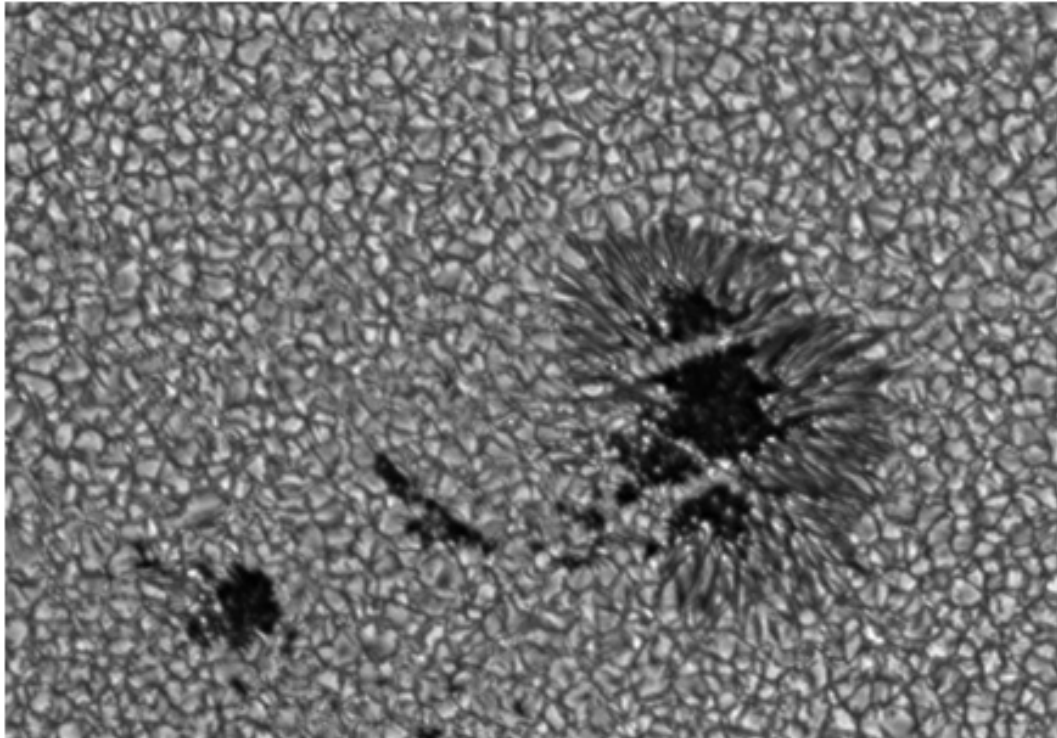


Figure 1.4 – Image de la photosphère du soleil mettant en évidence les granules convectives. Les taches plus pâles représentant les bulles de plasma chaud montant à la surface tandis que le réseau plus sombre montre le plasma refroidi en route vers l'intérieur. On peut aussi remarquer la présence d'une grosse tache solaire avec son ombre, au centre, et sa pénombre, sur les rebords. Tirée de <http://solarscience.msfc.nasa.gov/feature1.shtml>

1.2.1 Solution 1 : Héliosismologie et couches solaires

Bien qu'elle soit un adversaire de taille, l'opacité solaire n'a pu retenir la science pour bien longtemps. Effectivement, le développement de l'héliosismologie a apporté de nouvelles informations sur les couches internes du soleil. Cette technique repose sur le fait que les ondes sonores produites par les plumes thermiques de la granulation se propagent dans le soleil à des vitesses qui dépendent de la densité du milieu. La mesure des fréquences des modes résonants entre la surface et l'intérieur nous donne un profil de la vitesse du son à l'intérieur soleil ce qui permet de calculer un profil de densité du milieu beaucoup plus réaliste qu'un modèle structurel calibré uniquement sur les paramètres de surface. Ce profil moderne sépare le soleil en 5 couches distinctes que je vais présenter rapidement ici.

La couche la plus creuse se nomme le noyau, ou le cœur, et s'étend du centre de l'étoile jusqu'à 25% du rayon solaire. Cette zone est de loin celle la plus dense (avec une densité centrale de 150 g/cm^3) ainsi que la plus chaude, atteignant des températures de 15 millions de kelvins. C'est dans le noyau que le soleil produit son énergie par nucléosynthèse en fusionnant son hydrogène en hélium grâce à la chaîne PP. Fait intéressant, tandis qu'un photon créé dans le noyau prend plus de 170 000 ans pour s'échapper du soleil [32], un neutrino lui prend en moyenne seulement 2.3 secondes. Malheureusement, bien que les neutrinos transportent de l'information directe du cœur, ils restent encore aujourd'hui très difficiles à capter.

On nomme la couche suivante la zone radiative qui s'étend jusqu'à 70% du rayon solaire. Sans surprise, la densité de cette couche est beaucoup plus basse que celle dans le cœur et est comprise entre 20 g/cm^3 à la base jusqu'à 0.2 g/cm^3 à l'interface avec la prochaine zone. Sa température descend aussi de beaucoup, étant maintenant comprise entre 2 et 7 millions de kelvins. Par contre, elle reste suffisamment élevée pour que le transport d'énergie se fasse de manière radiative. Comme il y a absence de convection, ce qui lui donne souvent le titre de zone stable, cette couche est caractérisée par des stress de Reynolds nuls lui donnant une rotation solide. Avant de passer à la prochaine zone, j'aimerais dire un mot sur l'interface entre les deux couches. Cette interface, nommée

tachocline, se voit le siège de plusieurs changements assez drastiques sur une distance assez courte, de l'ordre de 4% du rayon solaire si on croit les dernières mesures héliosismologiques [9]. Entre autres, elle est considérée comme la section principale où est présent le phénomène de dynamo, dont je discuterai plus tard.

Passons maintenant à la zone convective qui s'étend de 70% du rayon solaire jusqu'à une centaine de kilomètres de la surface du soleil. Contrairement à la zone radiative, son transport énergétique se fait par convection et elle se voit donc caractérisée par une rotation de type différentielle, où la vitesse angulaire dépend de la latitude. Plusieurs travaux suggèrent la présence d'un phénomène de cellules géantes [24] dans cette couche. Cette "granulation" serait similaire à la granulation observée à la surface, mais avec les tailles de cellules qui sont beaucoup plus grandes, de l'ordre de 10% du rayon solaire. Ceci ferait en sorte qu'au lieu de milliers de petites bulles de plasma qui montent et redescendent, on n'en retrouverait que quelques-unes.

De la zone convective jusqu'à la surface du soleil, on retrouve la photosphère. Cette couche est importante, car elle est définie comme la zone du soleil qui est complètement transparente. Effectivement, les photons émis par le plasma dans cette zone sont très peu souvent réabsorbés et parviennent sans problèmes à la terre. Malheureusement, cette section reste très mince avec une largeur d'à peine une centaine de kilomètres.

La dernière des cinq zones classiques est nommée l'héliosphère. De plus, comme elle englobe une grande partie du système solaire, elle aussi est subdivisée en 5 sous-sections : la zone de température minimum, la chromosphère, la zone de transition, la couronne et le vent stellaire. Bien que ces zones ne soient pas particulièrement utiles à la compréhension de ce mémoire, je tiens à mentionner un effet qui reste encore à être expliqué de manière satisfaisante. La zone de température minimum, comme son nom l'indique, atteint des températures très basses, jusqu'à 4000 kelvins. Par contre, les trois prochaines zones (la chromosphère, la zone de transition et la couronne) se retrouvent avec une température qui est beaucoup plus grande que celle de la surface du soleil, de l'ordre du million de kelvins. Pourquoi la température augmente-t-elle ainsi ? Encore un autre des multiples mystères que nous cache encore aujourd'hui le soleil.

La figure 1.5 montre bien les couches décrites ci-dessus.

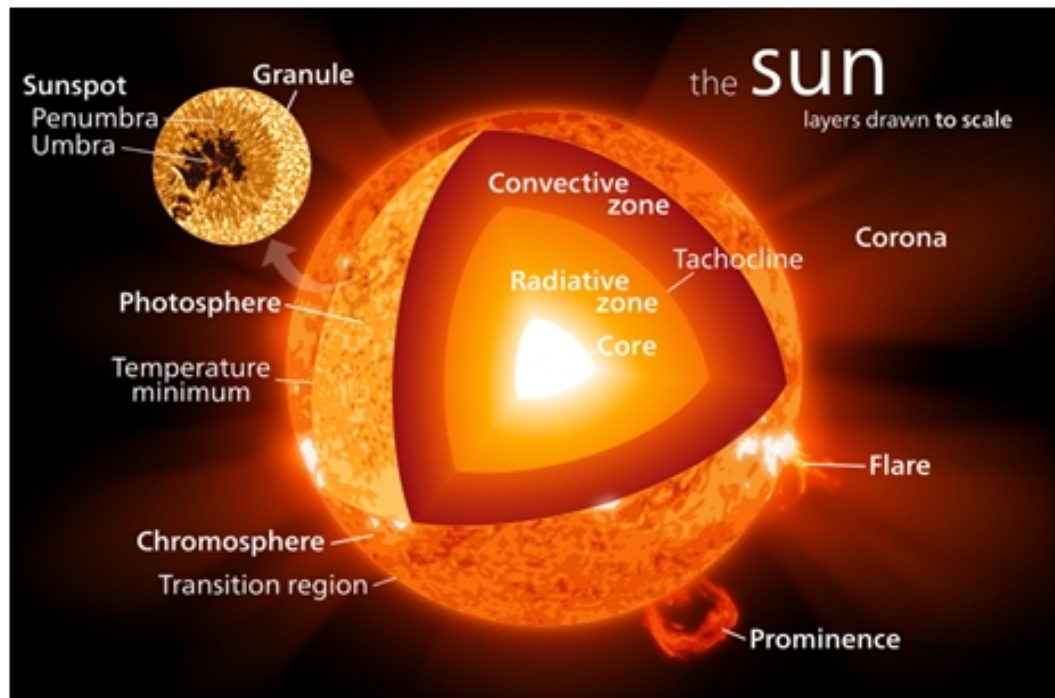


Figure 1.5 – Représentation d'artiste des couches solaires. Tiré de http://en.wikipedia.org/wiki/Stellar_structure

1.2.2 Solution 2 : Simulations numériques

Il est clair maintenant que l'héliosismologie a eu un important impact sur notre compréhension de la structure interne du soleil. Néanmoins, elle ne répond pas à toutes nos questions surtout en ce qui a trait aux phénomènes magnétiques profonds, le sujet principal de l'article présenté au chapitre 2. Il devient donc nécessaire de développer un autre outil qui permettra d'outrepasser l'opacité solaire : les simulations numériques.

Le plasma solaire étant un fluide, il est possible de développer des modèles structuraux se basant sur l'hydrodynamique afin de simuler l'évolution temporelle du soleil grâce à l'information sur les différentes couches extraite par l'héliosismologie. De plus, bien que le plasma soit un fluide globalement neutre, il est composé de constituants microscopiques électriquement chargés. Il devient donc essentiel de combiner les équations de Maxwell aux équations de l'hydrodynamique, ce qui forme ce que l'on nomme la magnétohydrodynamique (MHD). La numérisation de la MHD permet d'observer des effets magnétiques synthétiques profonds en décortiquant nos résultats de simulation et ainsi partiellement contourner la barrière de l'opacité.

Afin de nous assurer que nos résultats représentent bien la réalité inobservable, nous devons comparer nos modèles avec l'information qui vient des observations. Plus un modèle reproduit fidèlement des phénomènes observables, plus la validité des phénomènes synthétiques inobservables est grande. Malgré tout, même avec le développement fulgurant des modèles MHD, les phénomènes magnétiques synthétiques sont difficiles à produire et encore plus difficiles à analyser. Les premiers cycles magnétiques réguliers synthétiques ont été vus pour la première fois il y a moins d'une dizaine d'années ([18];[6]) et tardent encore à être expliqués de manière satisfaisante.

Un des phénomènes magnétiques les mieux compris est celui de la dynamo solaire qui est le principe d'amplification du champ magnétique. Ce phénomène a été simulé avec succès par plusieurs différents modèles dans différents groupes de recherche autour du monde et est aujourd'hui largement accepté comme le phénomène principal en contrôle de l'amplification et de l'inversion de polarité des champs magnétiques dans le soleil [10]. Comme mentionné auparavant, il serait centré sur la tachocline et de manière

générale produiraient des structures de champ magnétique toroïdales antisymétriques dans chaque hémisphère. Les taches solaires seraient des petites parties de cette structure à grande échelle qui se détachent et flottent jusqu'à la surface en la perçant comme un serpent de mer après avoir été légèrement déformées par la convection [33]. Évidemment, ceci n'est qu'un exemple du type d'explication que peut offrir l'analyse d'un bon modèle MHD, mais avec les développements significatifs apportés aux superordinateurs, les modèles numériques offriront de plus en plus de réponses à nos questions les plus complexes.

En résumé, on réalise rapidement qu'il existe peu d'outils quantitatifs efficaces autres que l'héliosismologie, la modélisation numérique et l'analyse de systèmes linéaires et faiblement non-linéaires, dont je n'ai pas parlé ici. L'observation solaire étant limitée par l'opacité solaire et les phénomènes internes du soleil étant fortement non-linéaires, la modélisation numérique se retrouve comme la dernière option viable pour une analyse pertinente. Un modèle numérique de haut niveau devient donc souvent un élément essentiel pour une étude poussée des phénomènes internes du soleil.

1.3 Simulation du GRPS : EULAG-MHD

1.3.1 Caractéristiques de la simulation

C'est dans ce contexte que les membres du Groupe de Recherche en Physique Solaire (GRPS) à l'Université de Montréal, en collaboration avec le National Center for Atmospheric Research (NCAR), ont développé le modèle numérique EULAG-MHD afin de pousser l'analyse des phénomènes solaires. L'intégrateur Eulerian/semi-LAGRangian (EULAG) qui est au cœur de cet outil a été utilisé dans plusieurs différents domaines, autant au niveau national qu'international et est reconnu pour son efficacité ainsi que sa versatilité. Effectivement, EULAG contient plusieurs possibilités de parallélisations, lui donnant une performance évaluée à l'ordre du téraflops, en plus d'être utilisable sur une grande gamme d'architectures différentes. Il assure aussi une précision uniforme de second ordre à travers la totalité de ses applications. [41] est un bon résumé pour plus d'informations sur le calculateur EULAG.

Historiquement, EULAG a été conçu pour résoudre des équations d'atmosphère terrestre et de fluide océanique, mais dû à sa versatilité, il a rapidement été repris avec succès pour de multiples applications. On retrouve des solutions aux problèmes de turbulence, d'écoulements urbains, d'ondes gravitationnelles, de micrométéorologie, d'atmosphère globale et de dynamique des fluides incompressibles. Avec quelques modifications, EULAG a même pu être appliqué aux problèmes d'ondes viscoélastiques du cerveau.

Pour le GRPS, EULAG était un choix excellent pour le développement d'un outil de modélisation de la zone convective. En plus de comporter des traits le rendant particulièrement intéressant à son application en physique solaire de par son historique de code atmosphérique, il a pu être modifié pour intégrer les équations magnétiques [46]. Bien qu'il soit possible d'analyser certains phénomènes uniquement hydrodynamiques, comme le plasma solaire composant l'atmosphère est fortement chargé, il fallut rajouter la composante "magnéto" hydrodynamique (d'où le MHD dans EULAG-MHD) afin d'avoir un modèle plus rapproché de la réalité.

L'ajout de la composante MHD nécessite quelques approximations de base pour simplifier le système. Sans rentrer dans une liste exhaustive, je crois qu'il est important de mentionner que l'on travaille dans un régime non relativiste. Évidemment, il est possible de prendre ces effets en compte, mais les effets seraient minuscules et négligeables considérant les vitesses qui sont simulées. De plus, on considère aussi un plasma qui est dominé par son taux de collision, ce qui assure que le système évolue en respectant une loi d'Ohm classique du type :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} . \quad (1.1)$$

Où σ est la conductivité électrique. Voici la liste des équations MHD résolue par EULAG-MHD :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla\pi' - \vec{g}\frac{\Theta'}{\Theta_0} + 2\vec{u} \times \vec{\Omega} + \frac{1}{\mu\rho_0}\vec{B} \cdot \nabla\vec{B} + D_v , \quad (1.2)$$

$$\frac{D\Theta'}{Dt} = -\vec{u} \cdot \nabla\Theta_e + D_\Theta , \quad (1.3)$$

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} = \vec{B} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{B} \nabla \cdot \vec{u} + D_B, \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \rho_0 \vec{u} = 0, \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.6)$$

où

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} + \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right). \quad (1.7)$$

Afin de bien se situer dans le système, voici un bref résumé des équations et des variables présentes ci-dessus. L'équation 1.2 gouverne la quantité de mouvement avec les deux variables les plus importantes : la vitesse du plasma \vec{u} et le champ magnétique \vec{B} . On retrouve également la vitesse angulaire moyenne Ω , fixée pour être égale à celle du soleil, le profil de densité de masse de l'étoile dans l'approximation anélastique ρ_0 , et g , la représentation habituelle de la gravité dépendante du rayon pointant vers le centre du soleil. La température potentielle Θ est une mesure indirecte de l'entropie, comme on peut le voir grâce à l'équation :

$$s = c_p \ln \Theta \quad (1.8)$$

où c_p est la chaleur massique à pression constante. À noter que Θ' représente une perturbation de l'état de référence, un état défini comme non magnétique avec une rotation de sphère solide, une entropie constante (stratification adiabatique) et satisfaisant l'équilibre hydrostatique $\vec{g} \propto r^{-2}$. π' quant à lui représente une perturbation de la densité de pression normalisée, incluant la pression et la force centrifuge, de l'état ambiant (l'état vers lequel le système est thermiquement forcé). On retrouve finalement D_v , qui sert comme terme de diffusion visqueuse, mais qui, dans le cas analysé dans l'article au chapitre 2, est mis à 0. Cette dernière omission est justifiée, car nous avons des nombres de Reynolds allant de 10^8 à 10^{10} .

La deuxième équation (1.3) gouverne l'entropie qui se retrouve aussi à être une mesure de l'énergie interne. Outre les variables présentes dans la première équation, on retrouve aussi Θ_e qui représente la température potentielle de l'état ambiant, une solution particulière du système anélastique [27] et D_Θ qui est le terme de diffusion thermique. Le

terme D_Θ contient la conductivité thermique, qui est négligeable, ainsi que la diffusivité radiative, que l'on conserve, mais qui est importante uniquement dans la zone stable.

Finalement, 1.4 est celle qui gouverne l'induction magnétique. Contrairement aux deux autres, son terme de diffusion magnétique D_B n'est pas nul, mais est si petit qu'il devient excessivement difficile à extraire et se confond souvent avec les erreurs numériques inévitables, qui agissent comme une diffusion numérique. Les deux dernières équations sont des équations de contraintes. Comme à l'habitude, on retrouve la conservation de la masse dans l'approximation anélastique qui filtre les ondes sonores et magnéto-soniques, la divergence nulle du champ magnétique ainsi que l'équation d'état d'un gaz parfait monoatomique nous assurant un système fermé.

Tout ceci est exécuté dans un domaine ayant la forme d'une couche sphérique gravitationnellement stratifiée avec une grille sphérique avec 128 points de maille en longitude, 64 en latitude et 47 en rayon. Ce domaine couvre la totalité des longitudes, les latitudes de -90° à 90° , l'équateur ayant l'angle nul, ainsi qu'un rayon r/R allant de 0.604 à 0.958. Le code roule avec un pas de temps de 30 minutes, mais les données ne sont souvent qu'enregistrées tous les 30 jours par souci d'efficacité. (Voir [18] pour une suite à l'article sur les travaux du GRPS de l'Université de Montréal avec EULAG-MHD.)

1.3.2 Variables reçues

La résolution de ce système d'équations fondamentales sur notre domaine génère différentes variables que l'on utilise pour analyser les effets se développant dans le modèle. Pour mon analyse particulière, je me restreins seulement aux trois composantes du vecteur de vitesse de plasma \vec{u} ainsi qu'aux trois composantes du champ magnétique \vec{B} . Dans le temps, on voit se former plusieurs structures cohérentes autant aux échelles de la taille de la maille qu'aux échelles globales. Certaines de ces structures sont classiques, dans le sens où elles sont attendues ainsi que reproduites régulièrement dans différents autres modèles, tandis que d'autres sont nouvelles et n'attendent qu'à être analysées plus en profondeur. Ici je vais tenter de résumer les structures les plus importantes qu'EULAG-MHD réussit à créer simplement en résolvant le système d'équations

présenté ci-dessus.

On voit à la figure 1.6 deux des trois composantes de la vitesse de plasma dans une représentation Rayon-Latitude de notre domaine. La première image montre qu'on observe bel et bien une séparation synthétique entre la zone stable et la zone convective comme observée par l'héliosismologie. Sous 70% du rayon solaire, dans la zone stable, on voit très peu de vitesses radiales tandis qu'on peut observer des plumes convectives au-dessus de l'interface dans la zone convective. Ces plumes convectives ascendantes et descendantes ont en moyenne la largeur d'un ou deux points de mailles et changent de taille lorsqu'on change la résolution. Comme, dans le soleil, ces plumes convectives sont beaucoup plus petites que les tailles de résolutions utilisées, la création d'un schéma numérique robuste assurant la stabilité non linéaire de la simulation devient un défi de taille.

La deuxième image présente aussi une séparation de zones, mais sous la forme du type de rotation. Si on se rappelle bien, la zone stable est caractérisée par une rotation solide où toutes les vitesses angulaires sont identiques, peu importe leur latitude, ce qui est cohérent avec nos données. À la différence de la zone stable, la zone convective n'a pas une rotation solide, mais bien une rotation différentielle où les vitesses angulaires dépendent de la latitude. On voit que la vitesse angulaire des pôles dans la zone convective se retrouve plus basse que celle dans la zone stable et inversement proche de l'équateur ! Cette séparation naturelle entre la zone convective et la zone stable par EULAG-MHD, cohérente avec les observations, est un des multiples éléments qui nous confirme la grande validité de ce modèle.

Ces trois images (Fig. 1.7) sont trois différentes visualisations de la composante longitudinale du champ magnétique et servent à présenter trois éléments spécifiques et importants pour la suite de ce mémoire. Premièrement, la première image me sert afin d'exposer la structure magnétique à grande échelle la plus importante se développant dans notre domaine. Je l'ai mentionné rapidement lorsque j'ai discuté des simulations numériques, mais c'est ici qu'on observe réellement la forme toroïdale antisymétrique du champ magnétique. Cette structure toroïdale est une conséquence directe de l'effet dynamo présent sur la tachocline dont je discuterai rapidement plus tard. La deuxième

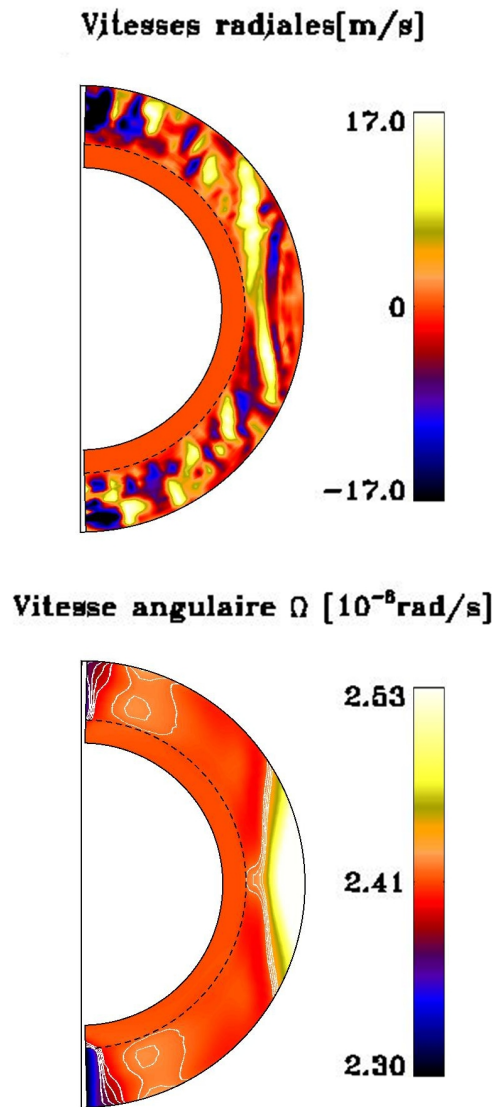


Figure 1.6 – Une représentation des vitesses radiales et angulaires du plasma dans EULAG-MHD où l’axe de rotation est vertical et le trait pointillé démarque la séparation entre la zone stable et la zone convective. L’image du haut est une coupe avec une longitude et un temps spécifique où on voit les plumes montantes (jaune) et descendantes (bleu) de plasma. L’image du bas représente la vitesse angulaire moyennée en longitude dans toute la simulation, où il est facile de voir le profil de rotation différentielle dans la zone convective principalement caractérisée par une vitesse plus grande (jaune) à l’équateur et plus basse (bleu) aux pôles.

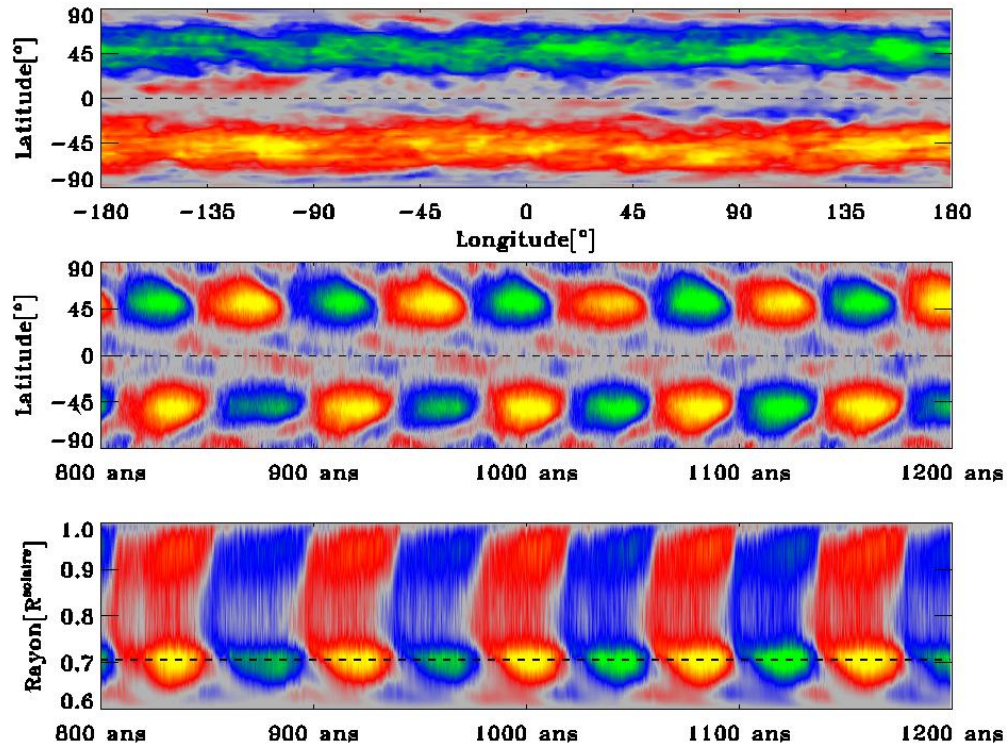


Figure 1.7 – Une représentation de la composante longitudinale du champ magnétique. L'image du haut est une coupe latitude-longitude a un temps spécifique à 70% du rayon solaire. L'image du centre est le champ moyenné en longitude dans un diagramme temps-latitude à la même profondeur que l'image d'en haut. Pour ces deux images, le trait pointillé représente l'équateur. L'image du bas est aussi le champ magnétique longitudinal moyenné en longitude, mais sous une coupe Rayon-Temps, où le trait pointillé représente l'interface entre la zone stable et la zone convective.

image montre que cette structure suit un cycle bien défini où le tore change de direction à chaque demie période. Ceci est d'autant plus important que ce genre de cycle magnétique synthétique est relativement récent dans la littérature avec des modèles fondamentaux comme le nôtre en plus d'être très similaire au cycle solaire réel. Finalement, la dernière image montre que le développement de ce champ magnétique semble naître quelque part dans la zone convective pour ensuite se positionner sur la tachocline, ce qui suggère que le phénomène de dynamo ne serait pas uniquement présent à l'interface, mais aussi dans la zone convective.

Je présente une dernière image (Fig. 1.8) que j'ai produit et présentée au concours de la Preuve par L'Image 2014 (3e Prix) qui résume bien les grandes lignes de cette rapide description des données produite par EULAG-MHD. On y voit les plumes convectives ainsi que la granulation synthétique modelée en 3D sur notre domaine, en plus de la structure toroïdale de champ magnétique présente dans l'hémisphère nord du domaine. À noter, on voit que le tore de champ magnétique est très torsadé sur lui-même ce qui n'était pas visible sur le graphique précédent ! Effectivement, les composantes latitudinales et radiales ne sont pas nulles et ont comme effet d'enrouler le tore sur lui-même, ce qui est beaucoup plus stable. Finalement, grâce à une extrapolation de champ potentiel à la surface, on produit un champ magnétique de forme généralement dipolaire très similaire aux observations ! Une autre confirmation qu'EULAG-MHD est un excellent outil de simulation et d'analyse.

1.4 Éléments clés

1.4.1 Proxy du cycle solaire

Avant de commencer à analyser ce qui fait battre le cycle magnétique dans le code d'EULAG-MHD, il est important de s'établir une bonne mesure de son évolution. Comme je l'ai exposé dans la section ci-dessus, il y a beaucoup de variables qui n'évoluent pas toutes de la même manière et qui peuvent masquer une multitude de phénomènes évoluant aussi dans le temps de multiples façons différentes. Il devient donc essentiel d'établir une mesure unique d'évolution du cycle. Évidemment, comme il n'existe pas de

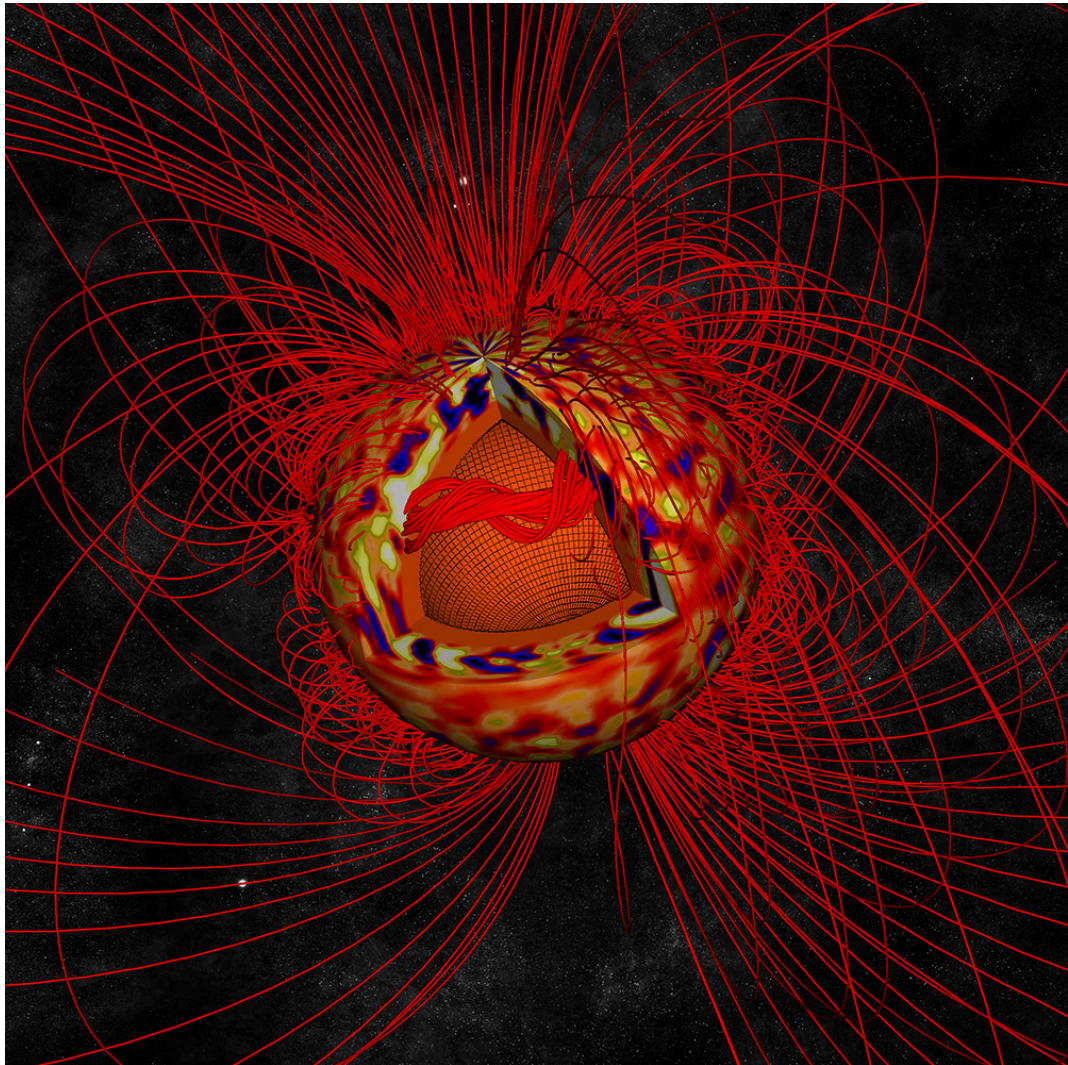


Figure 1.8 – L'activité de surface de notre Soleil varie d'intensité selon un cycle de 11 ans, à quelques exceptions près. Or, les mécanismes physiques sous-jacents, qui l'expliquent, sont difficilement observables. Pour tenter de les comprendre, on bâtit des simulations numériques. Ce qui permet de voir la dynamique des différents courants de plasma qui remontent vers la surface (jaune) ou qui retournent vers le cœur (bleu). Ces écoulements turbulents produisent, ici, un puissant champ magnétique torsadé (lignes rouges). Cette simulation n'est pas encore parfaite, puisque ce soleil virtuel "bat" selon un rythme de quarante ans. Mais elle se rapproche toujours plus de son flamboyant modèle. Texte et image tirés de http://ici.radio-canada.ca/concours/la_preuve_par_l_image/2014/index.asp

variable directe de cette évolution, nous devons utiliser un ensemble de "proxy" qui sera toujours le même lors de l'analyse des différents phénomènes afin d'établir un point de référence stable et cohérent.

À priori, l'évolution des structures magnétiques à grande échelle est ce qui semble caractériser le mieux le cycle magnétique. Comme mentionné plus haut, la structure magnétique principale semble être un tore de champ magnétique axisymétrique se formant dans chaque hémisphère aux alentours des latitudes 40-50°. Comme ce tore a aussi une forte composante poloidale ainsi qu'azimutale, il devient judicieux de le mesurer grâce à l'énergie magnétique contenue à l'intérieur au lieu d'y aller avec une seule des composantes magnétiques :

$$E_B = \int \int \int \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} dV \quad (1.9)$$

On doit prendre en compte le fait que la zone convective de notre modèle est très turbulente, de sorte qu'une mesure d'énergie oscille énormément dans le temps dû au mouvement du plasma. Ceci rend l'analyse plus difficile lorsqu'on tente de regarder des tendances sur des grandes périodes de temps. La zone stable quant à elle est beaucoup plus calme, ce qui rend une mesure d'énergie beaucoup plus lisse. Effectivement, l'énergie magnétique qui se retrouve dans cette zone est soumise à très peu d'effets qui peuvent la modifier outre la diffusion magnétique. Conséquemment, cette zone se rapproche beaucoup des approximations (écoulements laminares, rotation sphère solide, etc.) utilisées par les autres simulations numériques présentes dans le domaine, rendant les comparaisons plus faciles et améliorant sa validité.

Avec toutes ces considérations, le proxy du champ magnétique que nous utilisons se basera sur l'énergie magnétique axisymétrique intégrée dans la zone stable :

$$E_B = \int \int_{r/R=0.6}^{r/R=0.7} \int \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} dV \quad (1.10)$$

EULAG-MHD a produit quelques différentes simulations en variant légèrement ses paramètres, mais j'applique mon analyse sur une en particulier nommée la "millenium

simulation". Cette simulation produit depuis plusieurs années un cycle magnétique synthétique régulier et comporte plus de 1600 ans de données ainsi que plus de 35 inversions de polarités. Il a donc été possible pour moi d'appliquer une analyse comparative entre les cycles ainsi que de pouvoir observer les conséquences possibles à long terme. Pour plus de détails, [38] présente une excellente étude détaillée de la millenium simulation et de ses caractéristiques.

Déjà, simplement en appliquant l'ensemble des proxys discutés ci-haut sur cette simulation, j'ai pu rapidement identifier les caractéristiques méritant une analyse plus approfondie, la plus importante étant la mesure de la période du cycle solaire synthétique qui se retrouve à être de 40 ans au lieu de 11 ans dans le cas réel. Conséquemment, la compréhension des différents effets qui affectent la longueur de notre période et qui pourraient la rapprocher du cycle réel a été la principale motivation derrière l'article au cœur de ce mémoire. J'aimerais aussi mentionner qu'on retrouve aussi d'autres caractéristiques intéressantes auxquelles je ne m'attarderai pas, comme un léger déphasage temporel des deux hémisphères ainsi qu'une différence d'amplitude significative dans chaque hémisphère pour certaines périodes du cycle.

1.4.2 Dynamo

Avec notre proxy cohérent du cycle solaire synthétique d'EULAG-MHD, il devient intéressant de séparer son évolution en deux, soit la croissance et la destruction de son champ magnétique. Comme je l'ai mentionné auparavant, la croissance du champ magnétique solaire passe principalement par le processus physique d'autoamplification du champ magnétique présente grâce aux écoulements de fluides chargés connu sous le nom de la dynamo solaire. Plusieurs modèles de cette dynamo sont discutés dans la littérature ([10]) et EULAG-MHD n'en est pas exclu. Si on regarde l'équation d'induction magnétique du modèle EULAG-MHD (1.4), on peut voir que le terme en $\vec{B} \cdot \nabla \vec{u}$ peut mathématiquement agir comme un terme source. Par contre, notre modèle est loin d'être linéaire, ce qui implique qu'un changement minime à la force électromotrice pourrait amener un changement dans les écoulements qui pourraient eux-mêmes affecter l'amplification ou la destruction du champ magnétique. La compréhension du mécanisme

de la dynamo est donc une bonne première étape pour comprendre l'évolution du cycle solaire.

De façon très simpliste, la dynamo solaire se développe dans les sections caractérisées par un grand cisaillement entre deux sections de fluides (Fig. 1.9). Dans notre modèle, ce cisaillement existe principalement à deux endroits bien spécifiques et à deux échelles différentes. On retrouve premièrement un grand cisaillement entre la rotation solide de la zone stable et la rotation différentielle de la zone convective qui pourrait être la cause des forts champs toroïdaux produits aux grandes échelles chevauchant la tachocline. Deuxièmement, il existe aussi de forts cisaillements, aux petites échelles, associées à la convection. Bien que ces cisaillements seraient produits de manière chaotique à des échelles beaucoup plus petites que le champ toroïdal, leur moyenne longitudinale n'est pas nulle ce qui conduit à une force électromotrice turbulente qui contribue à la production de champ magnétique. La figure 1.7 du bas montre une telle approximation dans le temps où on peut clairement voir une apparition du champ au milieu de la zone convective migrant vers la tachocline et la surface dans le temps. La question de cette double dynamo est analysée plus en détail dans [11].

Bien que la dynamo solaire affecte la période du cycle solaire en étant le processus principal de croissance du champ magnétique, ce mémoire se concentre sur un effet qui affecte la période pendant la destruction du champ magnétique. Nous avons vu que lorsque le champ magnétique est amplifié, il forme des structures globales très stables comme les tores aux mi-latitudes. Si on désire inverser la polarité pour la prochaine période, il devient nécessaire de détruire le champ déjà établi. Tout processus qui aide à cette destruction se voit donc avoir une influence sur la période du cycle en s'assurant que plus on détruit vite, plus la nouvelle polarité peut prendre sa place rapidement. En effet, dans la zone stable, l'action de la dissipation ohmique pour le champ magnétique aux grandes échelles agit sur des temps caractéristiques beaucoup plus longs que la période du cycle.

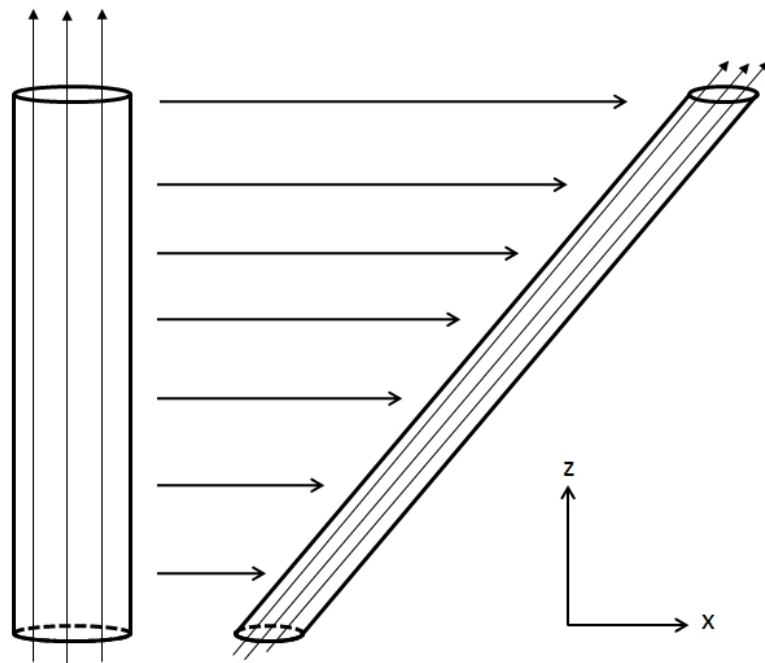


Figure 1.9 – Une différence de vitesse de plasma crée un cisaillement horizontal d'un tube de lignes de champ magnétique \hat{z} . Ce cisaillement étire le tube qui voit son rayon diminuer par conservation de la masse et donc un rapprochement de lignes de champ, ce qui augmente l'intensité globale du champ magnétique. En plus de l'augmentation de l'intensité, on se voit aussi créer une composante en \hat{x} du champ magnétique. Inspiré de *Solar and Stellar Dynamo*, P. Charbonneau, 2013

1.5 Phénomène à l'étude : Instabilités

Si on exclut tous phénomènes complexes, l'inversion de polarité sera une conséquence graduelle de l'inversion de la dynamo solaire. Lorsque la dynamo s'inverse, la production du champ magnétique s'inverse aussi et le champ ainsi produit viendra lentement annuler le champ déjà présent. Si ce phénomène simple est le seul actif lors de la destruction du champ magnétique, l'inversion se retrouve à être relativement lente. Comme mentionné précédemment, comme le système est hautement non linéaire, il est très possible que des effets d'écoulements puissent avoir un effet sur la stabilité du champ magnétique, qui pourrait lui-même affecter l'écoulement et ainsi de suite. L'article proposé approfondit les possibles conséquences d'un effet d'instabilités MHD.

Avant de commencer, il est important de situer historiquement le concept d'instabilités hydrodynamiques MHD ainsi que les travaux qui ont poussé cette recherche. Avant de parler de magnétisme, il faut noter qu'il existe une grande quantité d'instabilités qui sont seulement hydrodynamiques et qui ont été étudiés en profondeur. Dans l'histoire, on retrouve des études sur celles-ci remontant jusqu'à Da Vinci et ses études des vortex de rivières. Depuis, plusieurs autres physiciens modernes se sont attaqués à ce problème de telle sorte qu'on identifie plusieurs instabilités classiques de leurs noms, comme Kelvin-Helmholtz ou Rayleigh-Taylor. *Physical Fluid dynamics* de D. J. Tritton publié en 1977 est un ouvrage de référence classique traitant de ces phénomènes.

De manière simpliste, une instabilité est un état qui puise son énergie dans un réservoir du système dans un équilibre instable après avoir été déclenché par une perturbation. Dans le cas hydrodynamique, l'instabilité peut puiser dans la vitesse du fluide par exemple, bien qu'il existe beaucoup d'autres réservoirs d'énergies possibles. En plus d'être nombreuses, les instabilités ont la fâcheuse habitude de déclencher d'autres instabilités, pas nécessairement du même type, dans une suite infinie jusqu'à ce que le système atteigne un état statistiquement stationnaire et marginalement stable. Conséquemment, ceci rend leur étude difficile et notre compréhension de ce phénomène est loin d'être complète.

L'ajout de la composante magnétique rend le phénomène encore plus complexe.

Conceptuellement, la composante magnétique rajoute un nouveau réservoir d'énergie dans lequel les instabilités, maintenant MHD, peuvent puiser, rajoutant une myriade de nouveaux phénomènes. Un des ouvrages de référence les plus classiques sur les instabilités MHD se nomme *Hydrodynamics and hydromagnetic stability*, publié par S. Chandrasekhar en 1961, prix Nobel de la physique. Évidemment, comme le plasma du soleil transporte de constituantes chargées électriquement, notre cas se rapproche beaucoup plus du MHD que du cas hydrodynamique. Plus spécifiquement, j'étudierai le type d'instabilité MHD nommé "magnetoshear", une instabilité possiblement présente dans le soleil qui puise à la fois son énergie dans l'écoulement, mais aussi dans le champ magnétique du système (voir [30] et [21])

Le début du questionnement sur ce type d'instabilité au sein du soleil remonte à peine à 1981 avec les travaux de Watson [54], avant l'arrivée de l'héliosismologie. Avec l'information limitée sur l'intérieur du soleil, Watson avait postulé que le profil de rotation solaire à la surface était exactement à la limite d'être un état instable vulnérable aux perturbations horizontales. Watson en conclut que cette limite était ce qui limitait la différence des vitesses angulaires entre les pôles et l'équateur à 30%, sans quoi le système serait instable. En 1992 [47], Spiegel & Zahn développent une théorie qui nécessite l'instabilité du profil de rotation différentielle dans les couches plus profondes du soleil, qui d'après Watson serait encore plus stable qu'à la surface.

La solution de cette contradiction est l'arrivée des instabilités magnetoshear. En 1997, [19] étudient les effets qu'aurait l'ajout d'un large champ toroïdal à l'interface entre la zone stable et la zone convective dans leurs modèles solaires. Leur conclusion est simple : l'ajout d'un champ magnétique rend toujours le système instable et fournit l'énergie nécessaire pour le développement d'une instabilité de type magnetoshear.

Aujourd'hui, plusieurs travaux exposent la possibilité très réelle que les instabilités MHD ([48] est une bonne revue de celles-ci) soient un phénomène important dans les mécanismes internes du soleil. Ce qui est intéressant dans notre cas est le fait que ces instabilités pourraient affecter l'évolution du cycle solaire par leur capacité destructive. Afin de garder ma recherche suffisamment concentrée, j'ai basé mon article sur deux modèles spécifiques en appliquant leur analyse aux données d'EULAG-MHD afin de voir

si les instabilités observées dans ces modèles simplifiés seraient aussi présentes dans des modèles plus généraux comme le nôtre.

Le premier article est celui de Miesch ([30]) qui expose un proxy cohérent qui suit l'évolution d'une instabilité MHD : l'énergie magnétique totale contenue dans les composantes NON-axisymétriques des trois dimensions. Il démontre ensuite que ses modèles produisent un signal de ce proxy très particulier, évoluant avec le proxy du cycle magnétique avec léger déphasage. Il affirme donc qu'il y a une instabilité qui puise son énergie dans les structures à grandes échelles du cycle magnétique, accélérant ainsi sa destruction. En utilisant l'analyse linéaire de travaux précédents, Miesch conclut que le type d'instabilité associé au signal observé serait celle qu'il nomme "clamshell" ou "tipping" (Fig. 1.10).

Le deuxième article qui a motivé cette recherche est celui de Rogers ([43]) qui propose la présence de l'instabilité de Tayler. Cette instabilité, étudiée par Tayler en 1973 [52] et reprise par Spruit en 1999 [48], indique que tout champ magnétique axisymétrique est de plus en plus instable si son intensité augmente. Se basant sur plusieurs travaux ([49] ; [4] ; [7]), Rogers supporte l'idée que l'instabilité de Tayler serait présente dans la zone stable et applique le critère de Tayler, critère qui permet d'identifier une évolution latitudinale d'une "section instable" dans le temps. Similairement à Miesch, Rogers conclut que l'instabilité de Tayler dans la zone stable semble être un facteur important dans l'accélération de la destruction du champ magnétique en place.

Mon article présenté au chapitre 2 est donc centré sur l'application de ces deux méthodologies dans le cas du modèle d'EULAG-MHD et analyse jusqu'à quel point on retrouve effectivement ces types d'instabilités dans notre cycle magnétique synthétique. En combinant ces deux méthodes, il a aussi été possible de conclure à un scénario plausible de type "cause à effet" qui pourrait expliquer plus précisément comment l'instabilité affecte la destruction du champ magnétique présent lors de l'évolution du cycle solaire.

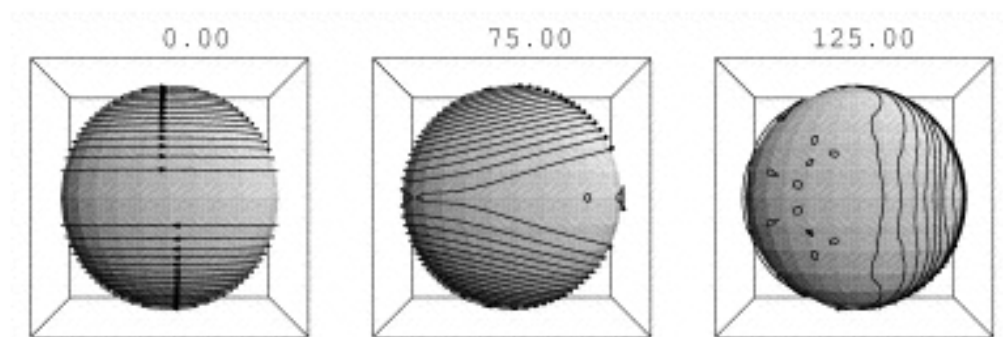


Figure 1.10 – Un exemple graphique de la "clamshell instability", pour sa ressemblance à l'ouverture d'une huître, à trois temps spécifiques. En l'absence de forçage sous la forme de rotation et de champ magnétique poloïdal, les lignes de champ magnétiques penchent jusqu'à ce qu'elles reconnectent à l'équateur. Le cas de la "tipping instability" est similaire avec la différence que l'axe de rotation de lignes de champ reste le même et donc ne se touchent jamais. Tiré de [8]

1.6 Contributions

Le travail présenté ici n'est qu'une brique dans la grande construction qu'est la compréhension complète de l'effet des instabilités au sein des processus magnétiques du soleil. Il devient donc important de bien situer les contributions que j'ai apportées dans le cadre de ce travail. Premièrement, j'ai écrit la quasi-totalité de la première version de l'article et les corrections ont été apportées par mon directeur de recherche, Paul Charbonneau. Toutes les images, ainsi que les animations ont été créées grâce à des routines que j'ai développées au fil des deux dernières années. J'ai également créé d'autres routines afin d'accélérer le processus d'extraction de données afin d'améliorer la fluidité de la recherche. De manière générale, cet article complétera la recherche déjà présente dans la littérature sur les processus d'instabilités MHD en offrant une analyse de celles-ci sur un modèle général 3D et en alimentant la discussion sur les possibles scénarios présents au sein du développement des cycles synthétiques.

À noter, je n'ai pas créé ou modifié le code EULAG-MHD. Je me suis concentré sur les différentes données déjà présentes dans des simulations qui avaient déjà montré une bonne stabilité ainsi qu'un cycle magnétique soutenu. J'ai extrait les différentes tendances ainsi que les signaux d'instabilités inspirés des travaux de Miesch [30] et de Rogers [43]. J'ai subséquemment fait une analyse de ceux-ci, mais le scénario final a été énoncé en premier par Paul Charbonneau et fut ensuite itéré plusieurs fois à la lumière des nouvelles analyses que j'ai pu extraire.

Le chapitre qui suit présente l'article, soumis à l'*Astrophysical Journal*, qui compose le cœur de ce mémoire.

CHAPITRE 2

EVIDENCE OF ACTIVE MHD INSTABILITY INSIDE RADIATIVE INTERIOR OF EULAG-MHD MODELS

N. Lawson¹, P. Charbonneau¹

Submitted to *Astrophysical Journal*

August 30st, 2014

¹Département de Physique, Université de Montréal, C.P. 6128, Succ. Centre-Ville, Montréal, Québec, H3C 3J7, Canada

ABSTRACT

We investigate the possible development of magnetohydrodynamical instabilities in the EULAG-MHD “millenium simulation” of Passos & Charbonneau [38]. This simulation sustains a large-scale magnetic cycle characterized by solar-like polarity reversals taking place on a regular multidecadal cadence, and in which zonally-oriented bands of strong magnetic field accumulate below the convective layers in response from turbulent pumping from above in successive magnetic half-cycles. Key aspects of this simulation include low numerical dissipation and a strongly subadiabatic fluid layer underlying the convectively unstable layers corresponding to the modeled convection solar zone. These properties are conducive to the growth and development of two-dimensional instabilities otherwise suppressed by stronger dissipation or mildly subadiabatic stratification. We find evidence for the action of a magnetoshear instability operating in the upper portions of the stably stratified fluid layers. We also investigate the possibility that the Tayler instability may be contributing to the destabilization of the large-scale axisymmetric magnetic component to high latitudes. On the basis of our analyses, we propose a global dynamo scenario whereby the magnetic cycle is driven primarily by turbulent dynamo action in the convecting layers, but MHD instabilities accelerate the dissipation of the magnetic field pumped down into the overshoot and stable layers, thus assisting in the global magnetic polarity reversals. Support for this scenario is found in the distinct global dynamo behaviors observed in a set of otherwise identical EULAG-MHD simulations, using varying levels of subadiabaticity in the stable fluid layers underlying the convection zone.

Keywords : Instability, Cycle, Magnetohydrodynamics (MHD), Stars: activity, Stars: magnetic field

2.1 Introduction

The dynamo-based model of the solar cycle put forth by [36];[37] over half a century ago has stood the test of time remarkably well. The joint inductive action of differential

rotation and helical turbulence remains at the heart of many contemporary solar cycle models, but helioseismic inversion of the sun’s internal differential rotation has brought increased attention to the tachocline, a rotational shear layer straddling the base of the solar convective envelope ([25]), as the locus of toroidal field amplification and storage, prior to its buoyant destabilization and rise to the photosphere to produce bipolar active regions ([17]). In these models, turbulent induction within the convection zone and/or generation of a surface dipole moment through the decay of active regions provide the regenerative mechanism required to close the dynamo loop (see [10] for a survey of these various models). Moreover, various physical mechanisms have been identified, which could power a dynamo contained entirely within the tachocline. For example, [44] (see also [34];[35]) have argued that helical waves growing along toroidal flux tubes stored within the upper stably stratified portion of the tachocline could provide an azimuthal electromotive force able to regenerate the poloidal component in situ; likewise, [14] have shown that in the presence of rotation, the joint magnetohydrodynamic (hereafter MHD) instability investigated by [19], operating in the tachocline, develops a net hemispheric helicity that could provide an analog of the turbulent electromotive force proposed by [36] and mathematically formalized by [50] as the “ α -effect” of mean-field electrodynamics

The vast majority of the solar cycle models built using these various regenerative magnetic field mechanisms operate in the so-called kinematic approximation, whereby the magnetic backreaction on the inductive flows is altogether neglected or incorporated in the models through largely ad hoc parameterizations. Global MHD simulations of solar convection do not suffer from this shortcoming, but it is only recently that advances in computing power and algorithmic design have jointly led to global simulations producing magnetic fields well-organized on global scales as well as undergoing (more or less) regular polarity reversals (e.g., [6]; [18]; [26]; [33]; [38]; [42]). However, few of these simulations include a stably stratified fluid layer underlying the convection zone, and those which do often use strongly enhanced dissipative coefficient to ensure numerical stability, which leads to dissipative dynamics in the convectively stable layers.

The EULAG-MHD simulations reported upon in [18] (see also [38]; [42]) offer an

interesting exception. In these simulations numerical stability is enforced via the advection algorithm itself, which effectively provides an adaptive subgrid model introducing only the minimal amount of dissipation required to maintain stability in regions of strong shear in the flow or magnetic field, and very little in smooth regions (see, e.g., [15]). Such simulations thus offer a unique opportunity to investigate dynamical effects taking place in the stably stratified layers, in particular the occurrence of instabilities otherwise suppressed by strong dissipation. This is the primary aim of this paper. Working with the EULAG-MHD “millennium simulation” presented in [38] and briefly described in §2.2, we first investigate in §2.3 the mechanisms leading to magnetic field accumulation in the stable layers of the simulation. Following [30], in §2.4 we then seek evidence for the development of a magnetoshear instability in the stable layer of the simulation and in §2.5 extend our analysis to the Tayler instability. We close in §2.6 by speculating on the role such instabilities may play in the large-scale magnetic cycle developing in the simulation.

2.2 Simulation characteristics

The foregoing analyses are based on the EULAG-MHD “millennium simulation” presented and analyzed by [38]. This simulation is based on the numerical solution of the anelastic magnetohydrodynamical equations in a thick, gravitationally stratified shell of electrically conducting fluid, rotating at the solar rate, and subjected to thermal forcing driving convection (see [18]; [42]). The simulation is performed using EULAG-MHD ([46]), a MHD generalization of the robust multiscale geophysical flow solver EULAG ([41]; [40]). We operate EULAG-MHD in its so-called Implicit Large-Eddy Simulation mode, whereby the dissipation required to maintain numerical stability is delegated to the underlying advection scheme, which in this case is analogous to an adaptive subgrid model where the minimal level of dissipation required to maintain stability is introduced only where and when it is required. This allows to reach strongly turbulent regimes on relatively small spatial meshes, in turn allowing temporally extended integrations. This is particularly important in the solar cycle context, considering the vast disparity

of timescale between the convective turnover time (hours to days in the outer reaches of our solution domain), and the large-scale magnetic cycle, with its multi-decadal period.

The millenium simulation used in what follows spans 1600 years (and counting), in the course of which 39 polarity reversals take place. The cycles are quite regular, with a mean period 40.5 ± 1.5 yrs, and are well-synchronized across hemispheres. The solution domain spans $0.604 \leq r/R \leq 0.96$, discretized on a modest spatial mesh $128 \times 64 \times 48$ in longitude, latitude and radius. The background stratification is convectively stable below $r/R = 0.711$, and mildly unstable above. We use conventional boundary condition on the flow at the lower and upper boundaries, namely impenetrable and stress-free, with an additional friction term introduced at the very base of the stable layer, allowing the damping of gravity waves that would otherwise be generated in the stable layer, and which could not be properly resolved on our spatial mesh and thus lead to numerical divergence.

2.2.1 The magnetic field and its cycle

Figure 2.1 illustrates some characteristics of the magnetic field building up in our simulation. Panel A and B show, respectively, a Mollweide projection of the radial flow and magnetic field components on a spherical shell at $r/R = 0.843$, near the middle of the convectively unstable layers. The magnetic field is quite turbulent, and develops on the same scale as the convective flow, as one would expect considering that convection is the primary inductive flow operating here. Figure 2.1B now shows a Mollweide projection of the toroidal (zonally-directed) magnetic component at the base of the convectively unstable layers. The magnetic field is still quite turbulent, but large-scale organization is now also clearly apparent with two strong zonally-oriented magnetic field bands having built up at mid-latitudes with opposite polarities in each hemisphere. Figure 2.1D shows a time-latitude “butterfly” diagram of the zonally-averaged toroidal magnetic component at the base of the convecting layers, spanning a 200 yr time period. The large-scale magnetic cycle characterizing the axisymmetric magnetic component shows up prominently on such a plot, with its ~ 40 yr half-period antisymmetry about the equatorial plane, and good hemispheric synchrony.

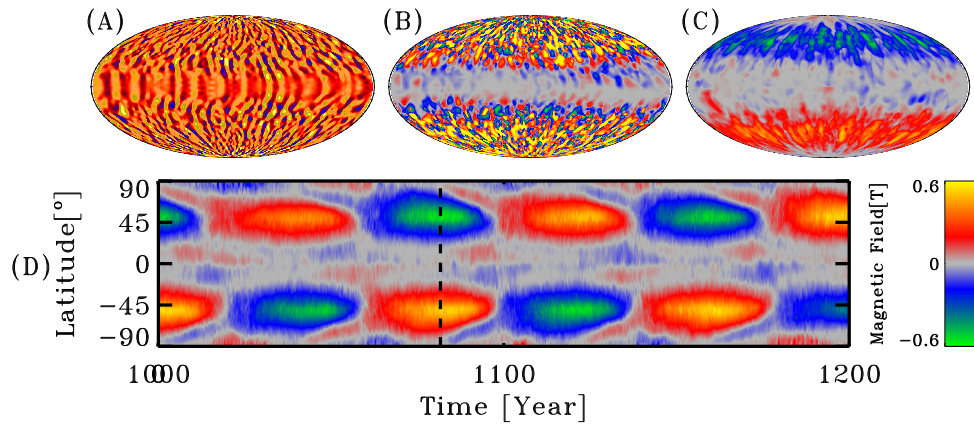


Figure 2.1: Snapshots in Mollweide projection of (A) the radial flow component, (B) the radial magnetic component, and (C) toroidal magnetic component, as produced by the the EULAG-MHD “millenium simulation” used in the foregoing analysis. Panels A and B are constructed on a spherical shell at mid-depth in the convection zone ($r/R = 0.843$) while panel C is constructed at the base of the convecting layers ($r/R = 0.711$). Panel D shows a time-latitude “butterfly” diagram of the zonally-averaged toroidal component, also constructed at $r/R = 0.711$, and illustrates the large-scale magnetic cycle developing in the simulation. The vertical dashed line indicates the epoch from which the snaphots A through C have been extracted, corresponding to the peak of a magnetic cycle.

Here, and in what follows, zonal averages are indicated by angular brackets and computed directly from the simulation output as, e.g.,

$$\langle B_\phi \rangle(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_\phi(r, \theta, \phi, t) d\phi, \quad (2.1)$$

What we will refer to non-axisymmetric components, denoted by primes, are then obtained by subtracting such zonal averages from the total flow (\mathbf{u}) and magnetic field (\mathbf{B}) produced by the simulation:

$$\mathbf{u}'(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{u}(r, \theta, \phi, t) - \langle \mathbf{u} \rangle(r, \theta, t), \quad \mathbf{B}'(r, \theta, \phi, t) = \mathbf{B}(r, \theta, \phi, t) - \langle \mathbf{B} \rangle(r, \theta, t), \quad (2.2)$$

Figure 2.2 shows yet another view of the same simulation data, this time in the form of meridional slices: zonally-averaged toroidal field snapshot at cycle maximum in A; angular rotational velocity averaged over the whole simulation in panel B; and a meridional slice (fixed longitude) snapshot of the radial flow component at cycle maximum in C. The axisymmetric large-scale magnetic field in (A) is seen to peak immediately beneath the base of the convection zone (green circular arc), and remains largely contained within a cylinder aligned with the rotation axis and tangent to the equatorial base of the convection zone. The large-scale field is organized there in the form of two strongly magnetized (peaking at $\simeq 0.5$ T) bands showing a strong degree of twist, the poloidal and toroidal components being of similar magnitude, as quantified by the ratio

$$\frac{\max(\langle B_\phi \rangle)_\phi}{\max(\langle B_\theta \rangle)_\phi + \max(\langle B_r \rangle)_\phi}, \quad (2.3)$$

which reaches values in the range $[0.6, 1]$ at cycle maxima. A well-organized toroidal component is also present throughout the bulk of the convecting layers, although with weaker amplitude, reaching ~ 0.1 T in mid-latitudes at cycle maximum.

The differential rotation shown on Fig. 2.2B is solar-like, in that it is characterized by significant equatorial acceleration and polar deceleration, both vanishing in the stable layer across a thin shear layer straddling the base of the convective envelope. In this

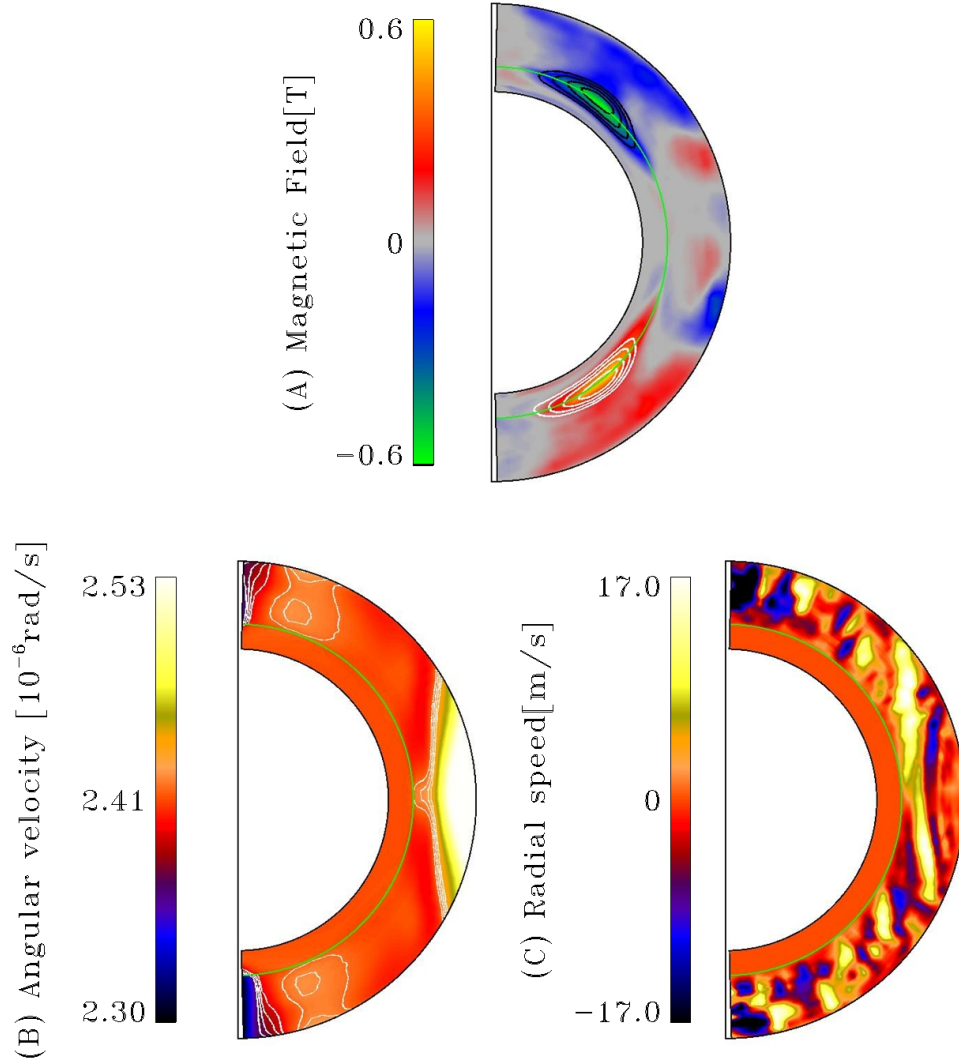


Figure 2.2: Meridional (r, θ) plane representations of (A) the zonally-averaged toroidal (color scale) and poloidal (black and white contours, field lines oriented clockwise and anticlockwise respectively) magnetic components at a cycle maximum, (B) the rotational angular velocity averaged zonally and temporally over the full length of the simulation, and (C) a snapshot of the radial flow component at a fixed longitude. The black vertical line is the rotation axis, and the green line indicates the base of the convective zone, at $r/R = 0.711$.

simulation, the pole-to-equator contrast in angular velocity is actually too small by a factor of ~ 3 as compared to the sun, and the angular velocity isocontours at low latitudes show too strong an alignment with the rotation axis. This reflects the strong influence of rotation on convective cells and rolls, which is also apparent in the radial flow snapshot on panel C, where the upflow and downflow tend to be radially-oriented at mid- to high-latitudes, but show strong deviations from the radial direction at low latitudes. In fact, outside of the aforementioned tangent cylinder, convection is organized in the form of a longitudinal stack of latitudinally-elongated convective rolls parallel to the rotation axis. This is a robust and common feature of solar convection simulations, whether purely hydrodynamical or magnetohydrodynamical, when operating in this parameter regime (see [31]). These structures may be related to the so-called giant convective cells which have been postulated to exist within the solar convection, and for which indirect observational evidence continues to accumulate (see [28], and references therein).

Other noteworthy features of this simulation include a well-defined dipole moment, solar-like rotational torsional oscillations and cyclic modulation of convective energy transport (see [38], [2], and [13] for further discussion of these features). However, as an analog of the sun and its magnetic cycle, the simulation produces a large-scale magnetic field that peaks at too high latitudes and fails to exhibit equatorward propagation, and the cycle period is nearly four times larger than what is observed. Nonetheless, the nonlinear interactions of flow and magnetic fields are captured in a dynamically consistent manner at all spatial and temporal scales resolved in the simulation. We therefore proceed with (cautious) confidence.

2.2.2 The tachocline and overshoot layer

In the EULAG-MHD millenium simulation analyzed herein, significant downward pumping and accumulation of magnetic fields takes place at the base of the convecting layers. This is a robust characteristic of numerical simulations of turbulent convection in density-stratified environments, and can be traced to the topological asymmetry between strong narrow downflows of cold fluid, and the gentler broader upflows of warm fluid (see, e.g., [53]). As can be seen on Fig. 2.2, the magnetic field accumulates and peaks

in the outer reaches of the underlying stably stratified fluid layers. This behavior is generally consistent with prevalent views of sunspot formation, which posit the storage of toroidal magnetic flux ropes in the overshoot layer, prior to their buoyant destabilization and rise to the photosphere ([17]; but see [51] and [33] for alternative viewpoints).

The background stratification used in our EULAG-MHD simulations is characterized by a very strongly stable stratification in the fluid layers underlying the convection zone. More specifically, we use a layered polytropic model, with index varying from a value 1.5 at the base of the convecting layers ($r/R = 0.711$), up to 2.5 at the base of the domain ($r/R = 0.604$). In conjunction with the very low diffusivities provided by EULAG-MHD's advection scheme in absence of strong velocity and magnetic shear, this naturally leads to the buildup of a thin overshoot layer. This is illustrated on Figure 2.3, showing the depth variation of the kinetic energy E_{K_r} associated with the radial component of the flow (solid line) and the root mean square latitudinal deviation $\Delta\Omega$ of the zonally-averaged plasma angular velocity (dash-dotted line), both integrated over spherical shells and time-averaged over the whole simulation:

$$E_{K_r}(r) = \frac{\Delta r}{2T} \int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (u'_r)^2(r, \theta, \phi, t) \rho(r) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dt , \quad (2.4)$$

$$\Delta\Omega(r) = \sqrt{\left\langle (\Omega(r, \theta) - \bar{\Omega}(r))^2 \right\rangle_\theta} , \quad (2.5)$$

where

$$\Omega(r, \theta) = \frac{1}{2\pi r \sin \theta} \int_0^{2\pi} u_\phi(r, \theta, \phi, t) d\phi , \quad (2.6)$$

$\bar{\Omega}(r)$ denotes spatial averaging over a spherical shell of radius r , and Δr is a shell thickness corresponding to the radial grid interval. Note that because significant rotational torsional oscillations develop in this simulation (see [2]), the calculation of $\Delta\Omega$ and $\bar{\Omega}$ are based on a full time-average over the whole simulation.

The kinetic energy of radial fluid motions remains roughly constant through the bulk of the convecting layers, but falls precipitously below the base of the convecting layers (vertical green line on Fig. 2.3), dropping by eight orders of magnitude by $r/R = 0.69$ (vertical blue line), followed by slower decrease by another two orders of magnitude

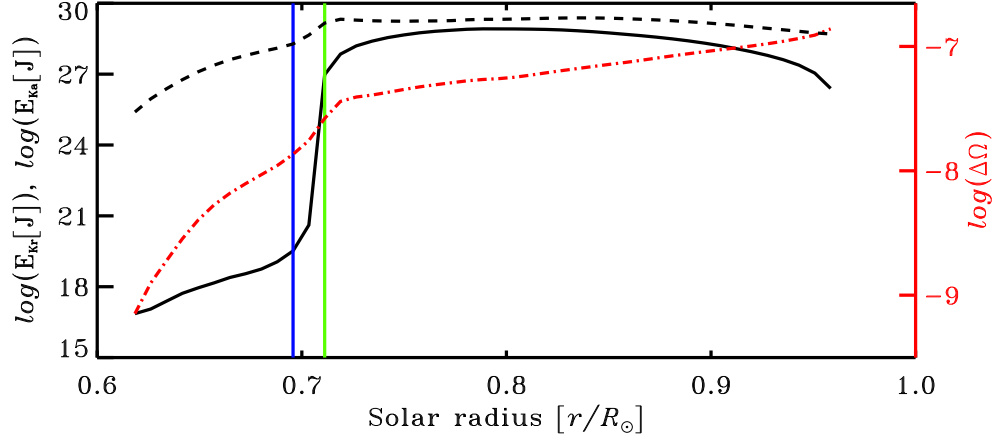


Figure 2.3: The solid and dashed lines show the depth variation of the kinetic energy associated respectively with radial and horizontal (latitudinal and zonal) fluid motions, integrated on concentric spherical shells of thickness $\Delta r/R = 0.023$. Note that the logarithmic scale on the left covers 15 orders of magnitude. The dash-dotted line shows the RMS latitudinal angular velocity deviation, as defined through eq. (2.5)–(2.6), also on a logarithmic scale (right axis). The green vertical line indicates the transition from superadiabatic to subadiabatic stratification, i.e., the base of the convection zone. The vertical blue line indicates the base of the overshoot layer, as defined in the basis of the kinetic energy profile (see text).

down to the base of the stable layer. The finite thickness of the layer across which the kinetic energy drops to zero is due to the fact that the upward-directed buoyancy force below the convectively unstable layers does not decelerate instantaneously the strong, downward convective plumes entering the stable layer from above, a process known as convective overshoot. We opted to define our “overshoot layer” as the depth interval over which the first sharp drop is taking place, i.e., $0.696 \leq r/R \leq 0.711$. Henceforth what we refer to as “stable layer” thus covers the depth range $0.604 \leq r/R \leq 0.696$. The significant, two orders-of-magnitude decrease in E_{Kr} as the top of the simulation domain is approached from below reflects our (conventional) choice of upper boundary condition on the flow for such simulations, namely stress-free and impenetrable.

The latitudinal differential rotation, as measured by $\Delta\Omega$ (dash-dotted line on Fig. 2.3), is roughly constant in the bottom half of the convecting layers, and also drops in the stable layers, albeit more slowly than the flow kinetic energy. This is due primarily to

large-scale magnetic torques contributing to radial fluxes of angular momentum down to $r/R \simeq 0.65$ in this simulation (see Fig. 6 in [2]). Despite a drop by a factor of ~ 3 across the overshoot layer, a weak but significant latitudinal differential rotation remains present in the outer half of our stable layer, with which is also associated a small but significant radial shear peaking at polar and equatorial latitudes. Note that the decrease in latitudinal differential rotation begins already within the convectively unstable layers, consistent with helioseismic inversions indicating that the solar tachocline straddles the base of the convection zone (e.g., [25]). Its thickness, as inferred from Fig. 2.3, is also consistent with helioseismology results, indicating a solar tachocline thickness no larger than $r/R = 0.04$ [9]. The slow increase of $\Delta\Omega$ in the outer half of the convecting layers can be traced to the strong equatorial differential rotation building up there (see Fig. 2.2B).

The dashed line on Figure 2.3 shows the depth variation of the kinetic energy E_{Ka} associated with the non-axisymmetric horizontal (i.e., latitudinal and zonal) component of the flow, plotted on the same logarithmic scale as E_{Kr} , again integrated over spherical shells and time-averaged over the whole simulation, similarly to our definition of E_{Kr} in eq. (2.4):

$$E_{Ka}(r) = \frac{\Delta r}{2T} \int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (u'_\theta)^2 + (u'_\phi)^2 \rho(r) r^2 \sin \theta d\theta d\phi dt . \quad (2.7)$$

The kinetic energy of the non-axisymmetrical horizontal components also seems to stay roughly constant though the bulk of the convecting layers, as does E_{Kr} . It also undergoes a sharp drop in the overshoot layer, but only by two orders of magnitude, as opposed to the 15 order-or-magnitude drop observed in E_{Kr} . A further, gradual decrease by another three orders-or-magnitude takes place between the base of the overshoot layer and the bottom of the domain. This indicates the presence of predominantly “horizontal” fluid motions, i.e. fluid motions constrained to constant radius spherical shells, sustained in the stable layers. This represents a first hint of dynamical effects developing in the stable layer, distinct from the simple buoyant deceleration of convective plume. We will revisit this issue in §2.4, but as a needed preamble first examine in greater detail the

physical mechanism(s) leading to magnetic field accumulation and amplification in the stable layers.

2.3 Origin of the magnetic fields in the stable layer

Figure 2.4 offers a more detailed look at the localisation of the large-scale magnetic field bands in relation to the overshoot and tacholine layers defined on the basis of Figure 2.3. This is the same zonally-averaged toroidal magnetic field at cycle peak displayed on Fig. 2.2A, but plotted this time in a cartesian radius-latitude plane. The toroidal field bands peak at $\simeq 0.5$ T in the overshoot layer, but also extend halfway down into the stable zone with significant amplitude (≥ 0.1 T).

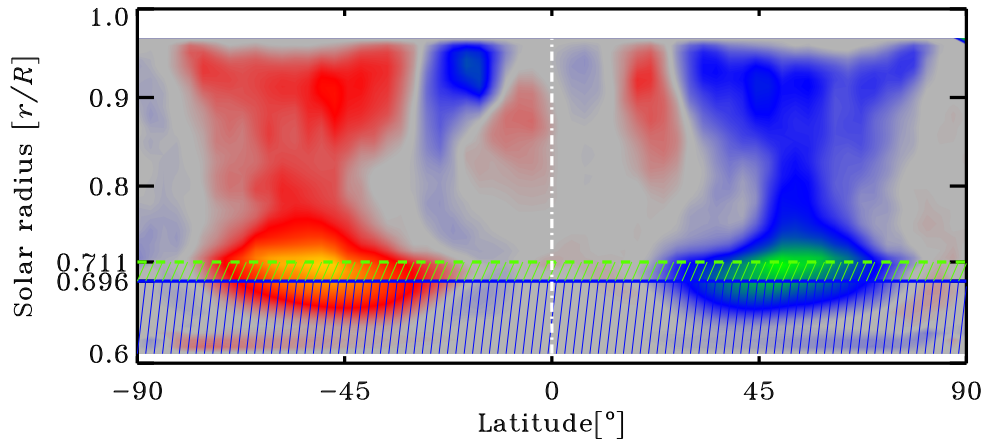


Figure 2.4: Zonally-averaged toroidal magnetic component at typical magnetic cycle peak, as on Fig. 2.2A, but now plotted in a cartesian radius-latitude plane. The green and blue horizontal lines delineate the limits of the overshoot layer (cf. Fig. 2.3), with the blue hatched area defining the stable zone.

It is interesting to note that at high radii near the equator, a different mean toroidal magnetic field develops at non-negligible levels. This magnetic field appears to be generated by a second, local dynamo tapping into the strong radial shear in the equatorial outer half of the convection zone, and undergoing polarity reversals on a much shorter period (~ 2 yr) than the primary deep-seated dynamo cycle [3].

One may rightfully wonder whether the strong magnetic fields building up in the

overshoot layer and underlying stable layer results only from accumulation of magnetic fields pumped downward from the convecting layers, or if local inductive effects are also contributing. As a first step towards answering this question, we first use the simulation output to compute, at each grid point, the Poynting flux:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} , \quad (2.8)$$

and integrate its radial component on spherical shells:

$$P(r, t) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_r(r, \theta, \phi, t) r^2 \sin \theta d\theta d\phi . \quad (2.9)$$

Figure 2.5 shows the depth variation of this quantity, time-averaged over the whole simulation (solid line), as well as equivalent profiles extracted at an epoch of magnetic cycle peak (dashed line) and polarity reversal (dotted line). In all cases the integrated radial Poynting flux is negative at all depths except in subsurface layers, as a consequence of our imposed impenetrable upper boundary condition. Magnetic field accumulation is expected wherever the divergence of the Poynting flux is negative, which here is generally the case in the depth range $r/R \leq 0.8$ at all phases of the cycle, consistent with the field accumulation seen on Figure 2.4. Note also how the Poynting flux reaches deep into the stable zone, despite the rapid disappearance of turbulent fluid motion below the overshoot layer.

The radial Poynting flux also shows a strong dependence on the phase of the large-scale magnetic cycle developing in the simulation, varying cyclically and approximately in phase with the magnetic cycle in the bulk of the convecting layer. In the overshoot and stable layers, however, a temporal lag is observed, as illustrated on Fig. 2.6. This Figure shows time series of the shell-integrated radial Poynting flux at three depths in the overshoot and stable layers. Note how the Poynting flux peaks later and later as one moves progressively deeper below the base of the convection zone. This is consistent with the Poynting flux being driven primarily from above, presumably through induction of the large-scale magnetic field by turbulent dynamo action within the convecting layers.

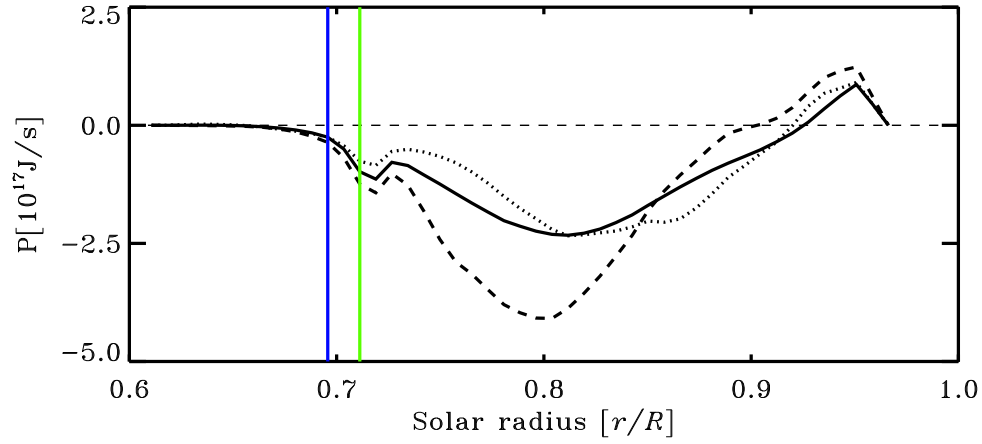


Figure 2.5: Depth variation of the radial Poynting flux integrated over concentric spherical shells (viz. eq. 2.9). The solid line shows an average over the whole duration of the simulation, and the dashed and dotted are computed from snapshots at cycle maximum and minimum respectively. The green and blue vertical line segment are carried over from Fig. 2.3, and delimit the radial extent of the overshoot layer.

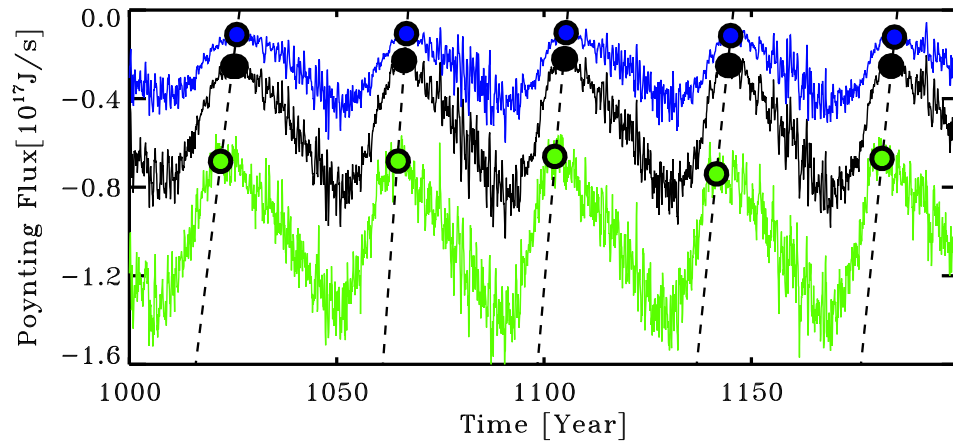


Figure 2.6: Poynting flux for 3 shells (from top to bottom: blue, $r/R = 0.696$; black, $r/R = 0.704$; green, $r/R = 0.711$). The oblique dashed lines connect the minima of each cycle in the time sequence, indicated by correspondingly colored large solid dots.

Figure 2.7 shows the location of the minima in the shell-integrated Poynting flux in a time-radius diagram, superimposed on a time-radius slice of the zonally-averaged toroidal magnetic component at 46.1° latitude. The minima occur shortly after the polarity reversal, consistent with the subsequent buildups of the deep toroidal field at and below the base of the convecting layers. The downwards slant across the overshoot layer is the direct counterpart of the dashed oblique lines on Fig. 2.6. Note, however, the break of slope at the base of the overshoot layer, suggestive of an additional —and possibly local— inductive and/or transport process contributing to the spatiotemporal variations of the Poynting flux.

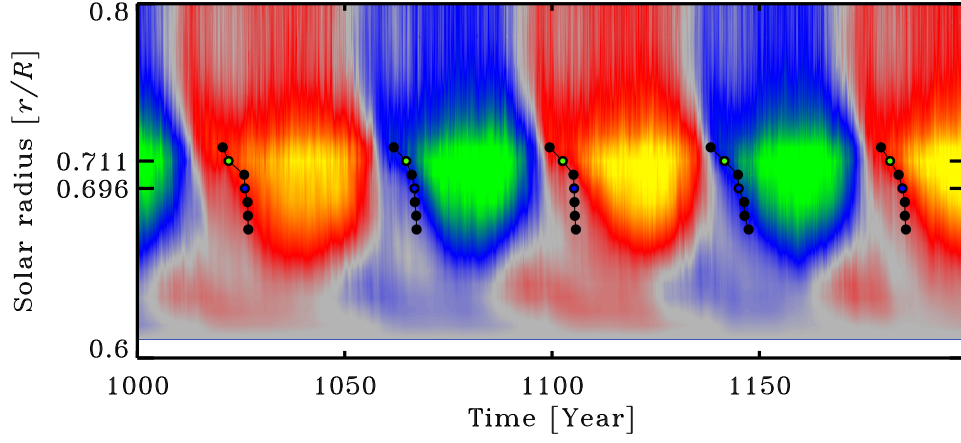


Figure 2.7: Zonally-averaged toroidal magnetic component plotted as a time-radii slice at 46.1° latitude in the N-hemisphere, over a ~ 200 yr segment of the millenium simulation. The solid dots indicate epochs of minimal shell-integrated Poynting flux at a few depths depth going from the base of the convection zone, through the overshoot layer and into the stable zone. The green and blue dots identify the minima in the correspondingly colored time series on Fig. 2.6.

We now compute the total magnetic energy content (E_M) in the overshoot and stable layers by direct integration of the simulation output in the depth range $0.61 \leq r/R \leq 0.711$, at an epoch of cycle maximum:

$$E_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{0.61}^{0.711} \mathbf{B}^2 dr d\theta d\phi . \quad (2.10)$$

The timescale for field accumulation beneath the convection zone is then directly obtained by dividing this quantity by the value of the shell-integrated Poynting flux at $r/R = 0.711$:

$$\tau = \frac{E_M}{P} . \quad (2.11)$$

The resulting numerical value is $\tau \simeq 8$ yr, i.e., about 20% of the ~ 40 yr magnetic half-cycle period in our simulation. This suggests that sufficient magnetic energy is being provided by downward turbulent pumping to destroy the deep toroidal flux bands of the preceding half-cycle and rebuild a band of opposite polarity in each hemisphere. This result is thus consistent with a minimalistic scenario whereby the buildup and reversals of the toroidal flux bands *below* the convection zone are merely a passive side-effect of global dynamo action *within* the convection zone.

However, τ is but a rough estimate, and other mechanism are potentially at play. As noted already in the context of Fig. 2.3, some level of latitudinal differential rotation, both radial and latitudinal, persists across the overshoot layer and well within the stable zone. With a significant large-scale poloidal magnetic component also present, shearing by differential rotation can contribute to the induction of a toroidal component. This process is captured by the zonal component of the MHD induction equation, which in the ideal limit and for axisymmetric large-scale magnetic field and differential rotation reduces to

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = r \sin \theta B_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \sin \theta B_\theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \quad (2.12)$$

Separately integrating B_ϕ and each term on the RHS of the above expression over the radial and latitudinal extent of the toroidal field at a time of solar maximum allows to compute characteristic timescales for induction by the radial and latitudinal shear, again by simply dividing the first by the other two. Both of these timescales end up at $\simeq 30$ yr; while significantly larger than the timescale (2.11) associated with the downward Poynting flux, these are still comparable to the half-cycle period for $\simeq 40$ yr. One can but conclude that differential rotation shear contributes significantly to toroidal field induction in the overshoot and stable layers.

On the basis of this new estimate, an additional factor is thus added to the minimal

scenario outlined above: the buildup and reversal of the deep-seated magnetic field bands occurs primarily through turbulent pumping from above, with additional amplification provided by the differential rotation shear. We could stop here, but one key piece of evidence compels us to push our analysis further, namely the dashed line on Fig. 2.3.

2.4 Searching for the signature of instabilities

2.4.1 Magnetoshear instability

As noted earlier, the kinetic energy of the non-axisymmetrical horizontal flow components (E_{Ka} show in Figure 2.4) remains at significantly high values well into the stable layer, before finally dropping abruptly by several orders of magnitudes at the lower boundary, primarily a consequence of the artificial friction terms introduced there. Our analyses thus far have concentrated on the large-scale axisymmetric magnetic components, but focus must now shift to the non-axisymmetric flow and magnetic field.

Numerous analytic, semi-analytic and numerical calculations have identified two-dimensional MHD instabilities that can become excited in stably stratified regions of the solar interior in the presence of latitudinal differential rotation and large-scale magnetic field. Particularly pertinent to our simulation is the so-called joint MHD instability first investigated by [19] (see also [14]; [20]; [21]). This instability develops in stably stratified environments in the presence of axisymmetric latitudinal differential rotation and large-scale toroidal magnetic fields, i.e., the situation prevailing in the outer reaches of the stable layer in our simulation. The instability planforms are 2D, i.e., they develop on spherical surfaces, and the most unstable modes have low azimuthal wavenumbers, $m = 1$ or 2 , as magnetic tension provides a restoring force that strongly suppresses higher wavenumber modes (see [21], and references therein). Depending on the cross-hemispheric phasing of the instability planform, the global development of the instability can lead to magnetic reconnection across the equator (“clamshell instability”; see, e.g., [8]), or the two toroidal flux systems can both tilt while remaining parallel to one another across the hemispheres (“tipping instability”).

The magnetoshear instabilities taps into both the kinetic energy of the differential

rotation, as well as the magnetic energy of the large-scale toroidal magnetic field. It is a “joint” instability, in that both ingredients are required for the instability to grow. The growth rate s of the most unstable mode is typically some fraction of the Alfvén time based on the toroidal magnetic field strength:

$$s \sim \frac{L}{u_A}, \quad u_A = \sqrt{\frac{\langle B_\phi \rangle^2}{\mu_0 \rho}}. \quad (2.13)$$

where L is a typical length scale for the toroidal magnetic field. Using $L = R$, $\langle B_\phi \rangle = 0.5 T$, and $\rho = 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$, appropriate for the upper part of the stable layer in our simulation, yields $s \simeq 2 \text{ yr}$; with a half-cycle period of some 40 yr, the instability would presumably have sufficient time to fully develop in the course of a magnetic cycle.

The nonlinear development of this instability has been investigated by [30] using a non-linear 2D shallow-water MHD model of a stably stratified thin shell domain identified with the tachocline. [30] could show that, provided an external (to his thin shell domain) source is available to replenish the differential rotation and poloidal magnetic field destroyed by the nonlinear saturation of the instability, the latter can be sustained with energy being cyclically exchanged between the axisymmetric and non-axisymmetric magnetic components. Although our EULAG-MHD simulation is 3D, the strongly sub-adiabatic stratification in the stable layer restricts plasma flows to spherical shells, so that Miesch’s model could be applicable to each concentric spherical shell. We therefore follow [30] by defining instability proxies through the energies associated with the non-axisymmetric magnetic field (Non-Axisymmetric Magnetic Energy, hereafter NAME), and the magnetic energy associated with the axisymmetric toroidal component (Toroidal Field Magnetic Energy, hereafter TFME). For our 3D simulation, these are defined through the following volume integrals:

$$\text{NAME}(t) = \int_{0.611}^{0.696} \int_{[0, \pi/2]}^{[\pi/2, \pi]} \int_0^{2\pi} (\mathbf{B}')^2 r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr, \quad (2.14)$$

$$\text{TFME}(t) = \int_{0.611}^{0.696} \int_{[0, \pi/2]}^{[\pi/2, \pi]} \int_0^{2\pi} \langle B_\phi \rangle^2 r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr. \quad (2.15)$$

Unlike in [30]’s model, here the poloidal field is generated autonomously; it will therefore prove useful to define an analog of (2.15) for the axisymmetric poloidal field:

$$\text{PFME}(t) = \int_{0.611}^{0.696} \int_{[0, \pi/2]}^{[\pi/2, \pi]} \int_0^{2\pi} (\langle B_r \rangle^2 + \langle B_\theta \rangle^2) r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr. \quad (2.16)$$

This proxy turns out to be largely dominated by the contribution from the latitudinal component $\langle B_\theta \rangle$. Note that in order to ensure cleaner proxy time series, we only integrate over the stable layer, excluding the overshoot layers. Moreover, as detailed in [38], magnetic cycles in the EULAG-MHD millenium simulation can show small but significant phase lag between hemispheres; all of the above proxy integrals are therefore computed separately for the Northern ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) and Southern ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi$) hemispheres.

Fig. 2.8 shows a representative 400yr segment of the hemispheric time series for the TFME (solid line) and NAME (dashed line) proxies. Both proxies wax and wane cyclically while maintaining a well-defined phase lag, with NAME peaking in the late descending phase of TFME, and the onset of the growth phase of NAME almost always occurring near the peak of TFME. This is remarkably similar to the pattern characterizing the forced 2D simulations of [30] (compare his Figure 2 to Fig. 2.8 herein). This suggests —of course without strictly proving— that we are observing in the millenium simulation the same type of magnetoshear instability investigated by [30]; however, no external forcing is imposed here, as the latitudinal differential is being maintained by Reynolds stresses within the convection zone, and the poloidal field is naturally replenished by turbulent dynamo action within the convecting layers and subsequent downward pumping of the magnetic field. In particular, the roughly similar amplitudes of variation in TFME and NAME, $\sim 4 \times 10^{29} J$, are consistent with the cyclic exchange of energy between the axisymmetric and non-axisymmetric magnetic components characterizing the forced shallow water simulations of [30].

Under flux freezing, any global displacement of the toroidal field bands due to the magnetoshear instability —whether developing in its clamshell or tipping variants— must be accompanied by a corresponding latitudinally-oriented flow constrained to spher-

ical shells. Figure 2.3 already indicates the predominance of horizontal flows in the stable layer, and the characterization of such flow can provide further evidence that the instability is indeed operating. Accordingly, we now define two measures of flow kinetic energy similar to those used for magnetic energy: the total kinetic energy of the poloidal (PKE) and toroidal (TKE) components. As before, we integrate separately the Northern and Southern hemisphere:

$$\text{PKE}(t) = \int_{0.611}^{0.696} \int_{[0, \pi/2]}^{[\pi/2, \pi]} \int_0^{2\pi} (u_\theta^2 + u_r^2) \rho r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr. \quad (2.17)$$

$$\text{TKE}(t) = \int_{0.611}^{0.696} \int_{[0, \pi/2]}^{[\pi/2, \pi]} \int_0^{2\pi} u_\phi^2 \rho r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr. \quad (2.18)$$

Note that we use here the total flow components, but since very little axisymmetric meridional flow develops in the stable layer, PKE is essentially the flow equivalent of NAME. Moreover, as with the PFME proxy, PKE is dominated by the latitudinal component u_θ .

Figure 2.9 shows these two time series over a restricted 200yr temporal span, together with the magnetic proxies defined earlier, all in the Northern hemisphere. The dashed vertical lines indicate the epoch of peak NAME in the descending phase of each of the five magnetic cycles developing over the time period covered. Note that our (axisymmetric) poloidal field magnetic energy PFME also exhibits cyclic behavior, in response to dynamo action in the overlying convecting fluid layers, unlike in the simulation of [30] where the poloidal (latitudinal) field is imposed externally and remains constant.

Examination of Figure 2.9 reveals that both PKE and TKE evolve in phase with NAME, with peak-to-through variations ~ 0.3 and $0.1 \times 10^{29} \text{J}$, over an order of magnitude lower than the corresponding variations in TFME. Indeed, the combined rise of NAME, TKE, and PKE adds up to $\sim 2.5 \times 10^{29} \text{J}$, of the same order but still comfortably smaller than the associated $\sim 4 \times 10^{19} \text{J}$ drop in TFME. The in-phase variation of PKE with NAME suggests that the horizontal flow develops simultaneously with the growth the non-axisymmetric magnetic component, which is the pattern expected for

the clamshell or tipping variants of the magnetoshear instability. As plasma is displaced away from or towards the rotation axis, conservation of angular momentum causes zonal deceleration or acceleration, leading to a growth of TKE in phase with PKE, as is indeed observed on Fig. 2.9.

The clamshell instability should have a fairly simple and easily identifiable geometrical signature that develops on the shells harboring the strong toroidal magnetic fields (see, e.g., Fig. 1 in [8]). If we neglect the (very weak) radial component of our magnetic field inside the stable layers, we can again follow [30] and visualize magnetic fieldlines as isocontours of the magnetic streamfunction J defined such that $\mathbf{B} \sim \hat{\mathbf{z}} \times \nabla J$. These fields lines are shown on Fig. 2.10, constructed at a depth $r/R = 0.67$ well below the overshoot layer at epochs of magnetic cycle maximum (peak TFME proxy, left), and subsequent peak NAME proxy, representing the apex of the instability growth.

The epoch of peak TFME usually corresponds to the beginning of the growth phase for NAME (top panel on Fig. 2.9). The orientation of field lines is predominantly horizontal, with a hint of global tilting (corresponding to a $m = 1$ deviation) also visible. However, by the time of peak NAME, multiple structures in longitude have developed, with peak power at $m = 3$ or sometimes $m = 4$ in other cycles than the one used to generate Fig. 2.10 with little sign of cross-equatorial reconnection (compare to Fig. 3B in [30]). If the clamshell or tipping magnetoshear modes are developing here, their nonlinear saturation proceeds differently than in the 2D shallow-water model of [30]. Nonlinear interactions could certainly lead to the buildup of energy at higher azimuthal wavenumber in the saturated stage of the instability, even if $m = 1$ is the most unstable mode in the linear regime. However, another obvious possibility is that our identification of the magnetoshear instability is mistaken, and that some other type of MHD instability is instead at play. We now turn to this possibility.

2.5 Digging further: the Tayler instability

The magnetoshear instability investigated by [30] is far from the only one that can potentially develop in stably stratified, weakly magnetized differentially rotating astro-

physical environments. For example, the turbulent stresses generated by the magnetorotational instability (MRI; see [1]) are now believed to dominate the outward transport of angular momentum in weakly magnetized accretion disks. This is a very powerful, local MHD instability, requiring a significant poloidal magnetic component to operate, but in the stellar interior context it also requires a significant radial differential rotation. Moreover, if present, it would lead to significant radial mixing. This appears ruled out here, on the basis of Fig. 2.3 which indicates that fluid motions in the stable layer are strongly restricted to spherical surfaces.

Another class of MHD instabilities, the “Tayler instabilities”, have also been investigated in detail in the context of various types of large-scale magnetic fields embedded in stellar radiative interiors. Particularly relevant in the present context is the instability of a purely toroidal magnetic field in the ideal MHD limit ([52];[48]). In the absence of rotation, any such magnetic field $B_\phi(r, \theta)$ is unstable, no matter how weak the field is. The instability is most prone to develop close to the magnetic symmetry axis, where $B_\phi = 0$, as no restoring force can resist the magnetic force pointing towards the axis (see, e.g., the discussion in [48]; also [7, 49]). The instability can develop both axisymmetric and non-axisymmetric planforms, with the lowest zonal mode (azimuthal wavenumber $m = 1$ in a spherical harmonic expansion) usually most unstable in the latter case, once again because these develop the least magnetic tension tending to oppose the instability. As with the magnetoshear instability investigated in the preceding section, the growth rate for the Tayler instability is of the order of the Alfvén time. Stability criteria for axisymmetric purely toroidal magnetic fields have been obtained by [22] for spherical geometry, and take the form:

$$\frac{1}{4\pi r^2 \sin^2 \theta} \left[2H_\phi^2 \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial H_\phi^2}{\partial \theta} \right] > 0, \quad m = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{4\pi r^2 \sin^2 \theta} \left[H_\phi^2 (m^2 - 2 \cos^2 \theta) - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial H_\phi^2}{\partial \theta} \right] > 0, \quad m = 1, \quad (2.20)$$

where $H_\phi^2 = b_l^2(r) P_l^2(\cos \theta)$. For the purposes of the foregoing analysis we shall simply

assume $H_\phi \equiv \langle B_\phi \rangle(r, \theta)$, which leads to:

$$2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial \ln \langle B_\phi \rangle}{\partial \theta} > 0, \quad m = 0, \quad (2.21)$$

$$1 - 2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial \ln \langle B_\phi \rangle}{\partial \theta} > 0, \quad m = 1. \quad (2.22)$$

These stability criteria are admittedly obtained in idealized conditions differing significantly from those encountered within our numerical simulation: ideal MHD, no rotation, purely toroidal magnetic field. However, [39] showed that rotation weakens but does not suppress the instability. Likewise, the instability is also weakened, but not suppressed, in the presence of a large-scale poloidal magnetic field component. In fact, the numerical simulations of [4] confirm the generally unstable nature of large-scale magnetic fields in stably stratified, radiative stellar interiors, and also indicate that the most stable large-scale magnetic field configurations have poloidal and toroidal components of comparable strengths ([5]). Interestingly, and as noted earlier in §2.2.1, the strong magnetic field bands building up across the base of the convection zone in our simulation also have toroidal and poloidal large-scale magnetic components of comparable magnitudes.

Of course, the above stability criteria are of limited use in the analysis of a numerical simulation having reached a nonlinearly saturated statistically stationary state. If an instability is indeed operating, what one observes in the simulation is the global flow and field structure resulting from the saturation of the instability, rather than the original unstable background structure on which eqs. (2.21)–(2.22) could be legitimately applied. In such a situation one would expect the global magnetic field profiles to exhibit marginal stability when computing the stability criteria. Nonetheless, [43] found evidence for the development of the axisymmetric ($m = 0$) form of the Tayler instability, in a manner consistent with eq. (2.19), in her 2D axisymmetric MHD simulations of the solar radiative interior including a poloidal magnetic field and imposed differential rotation (a forcing setup somewhat as in [30]). Her simulations show that even in the absence of significant bona fide dynamo action, as long as the poloidal component persists the

differential rotation can induce a toroidal component which, upon becoming unstable to the axisymmetric Tayler instability, undergoes polarity reversals (see her Fig. 6). Even closer to the physical situation of interest here, [7] performed 3D MHD simulation of the solar tachocline in which they also observe the development of what they suggest is the non-axisymmetric form of the Tayler-like instabilities, persisting at all depths and particularly prominent in the vicinity of the polar axis, as expected of this instability.

Figure 2.11 shows a time-latitude representation of the $m = 1$ stability criterion (eq. 2.22), constructed at the upper extent of the stable layer in the simulation ($r/R = 0.696$, blue line on Figs. 2.2, 2.3 and 2.4) over the same 200yr subinterval as Fig. 2.1D. Areas in gray are stable, and the red-to-yellow color scale encodes the magnitude of the $m = 1$ Tayler stability criterion, i.e., the LHS of eq. (2.22). The superimposed thick black lines are the NAME time series for the Northern and Southern hemispheres, the latter assigned negative values for the purpose of clarity and symmetry. The thin dashed line is the $\langle B_\phi \rangle = 0$ isocontour, and are useful in identifying the spatiotemporal unfolding of magnetic polarity inversion at this depth.

The large-scale axisymmetric toroidal field does turn out to be stable at most latitudes and phases of the cycle, the stability criterion being violated mostly in the vicinity of the polarity inversion line, and at high latitudes. As argued earlier, marginal stability is in fact expected across most of the domain in our nonlinearity-saturated, statistically stationary simulation. One may however also expect the linear stability criteria to be violated wherever and whenever the instability is turning on, and has not yet had time to reach saturation and alter the background magnetic field profile. Taken at face value, Fig. 2.11 indicates that the Tayler instability is first triggered at polar latitude, which coincides temporally with the onset of the growth phase in the NAME proxy (thick black lines), and subsequently moves to progressively lower latitudes. Once the “instability front” reaches around $\pm 60^\circ$ latitude, corresponding to the poleward edge of the mid-latitudes magnetic field bands, the front becomes more slanted, suggesting that the higher magnetic energy available in the field bands accelerates the development of the instability, as evidenced by the crossing horizontal and vertical thin black lines on Fig. 2.11. This is also when the NAME proxy reaches its peak before beginning to drop, signaling that

the (non-axisymmetric) instability is now turning itself off via the destruction of the axisymmetric toroidal field bands making up its energy reservoir. After the instability shuts off, there follows a “quiet” interval during which the axisymmetric toroidal magnetic bands start to rebuild once again, up to the point where the instability will once again be triggered at high latitudes.

Interestingly, a plot similar to Fig. 2.11 but constructed for the $m = 0$ stability criterion (2.21) reveals a spatiotemporal pattern closely resembling the $m = 1$ case, but with reduced amplitude, consistent with the suppression, by rotation, of the axisymmetric Tayler instability in favor of its antisymmetric $m = 1$ cousin, as suggested by the analysis of [39].

2.6 Additional numerical experiments and a plausible scenario

In this paper we have investigated the possible occurrence of non-axisymmetric MHD instabilities developing in the subadiabatic, stably stratified fluid layers underlying the convectively unstable layer in the EULAG-MHD “millennium simulation” described in [38]. The cyclic, phase-lagged waxing and waning of the magnetic energies associated with the axisymmetric toroidal and non-axisymmetric total magnetic field components, as extracted from the stable layer in the simulation, bears a striking resemblance to that characterizing the magnetoshear instability studied by [30] using a shallow-water MHD model with forced differential rotation poloidal and magnetic component. In our simulation this forcing occurs naturally through Reynolds stresses and turbulent dynamo action taking place in the overlying convecting layers. However, and unlike [30], we fail to detect unambiguously the $m = 1$ signal expected on the basis of linear theory for this instability. Our analysis nonetheless suggests that something akin to this magnetoshear instability is operating in our simulation.

Motivated in part by the above failing, and by the very weak latitudinal differential rotation characterizing the stable layers in our simulation, we also investigated the possibility that the Tayler instability be operating instead of (or perhaps along with) the magnetoshear instability. Further motivation is also found in some recent numerical

studies ([7, 43]) which have uncovered various elements of evidence for the action of this instability in a similar solar context. The Tayler instability does not require differential rotation, as it taps only into the magnetic energy of the underlying large-scale magnetic field to power itself, and is particularly prone to develop in the vicinity of the magnetic symmetry axis. Using linear stability as a guide, we have found some suggestive evidence for the action of the Tayler instability as an agent contributing to the destruction of the large-scale toroidal magnetic field bands building up in the simulation, especially on their poleward edge.

Whatever the exact nature of the instability that may be at play in the stable layers of our simulation, the crucial question is: does it play a significant —or maybe even important— role in the global dynamo process leading to amplification and polarity reversals of the large-scale magnetic field? The fact that the Poynting flux remains downward directed at all phases of the magnetic cycle and at all latitudes in the lower convection zone and overshoot layer certainly suggests that there is no direct upward electromagnetic feedback from the stable layer into the convecting fluid layers in the simulation. The obvious empirical test, running a simulation without the stably stratified fluid layer but otherwise identical, is unfortunately inconclusive. Such a simulation does *not* produce a decadal large-scale cycle, but the differential rotation and cyclonic character of turbulence in the bottom of the convection zone also turn out markedly different, due to the boundary conditions that must be imposed there. It is therefore impossible to tell whether the lack of large-scale magnetic cycle is due to a different mode of dynamo action within the convection zone, rather than to the absence of the stable layer.

Another option for numerical experimentation is to retain the stable layer, but alter its degree of subadiabatic stratification. Figure 2.12 shows the result of such an experiment. This simulation is in all aspects identical to the millenium simulation used herein, except that now the polytropic index varies linearly with depth from a value 1.5 at the base of the convecting layers up to 3.0 at the base of the domain, whereas in the millenium simulation runs the corresponding linear variation is from 1.5 to 2.5. The top panel of Fig. 2.12 shows a time-latitude diagram of the zonally-averaged toroidal magnetic field at $r/R = 0.711$. Starting again from a low amplitude random initial con-

dition, the simulation develops a large-scale magnetic cycle that is essentially identical to that characterizing the millenium simulation, showing the same cycle period, magnetic amplitude, and equatorial antisymmetry. However, after 400yr of simulation time, the Southern hemisphere fails to reverse, but the cycle picks up again and is now apparently showing symmetry about the equator. This is short lasting, as by $\simeq 500$ yr the Northern hemisphere shuts down, followed by the Southern at $\simeq 550$ yr.

Has the simulation fallen here into a Maunder Minimum-like state of strongly suppressed cyclic activity? The answer is no, as evidenced on the bottom panel of 2.12. This shows a time-*longitude* diagram of the toroidal magnetic component, *not* averaged zonally, and extracted at 45° latitude and the same depth as the top panel. Far from vanishing, the large-scale magnetic cycle persists with similar amplitude and a shorter half-period of $\simeq 30$ yr, but now its symmetry axis has undergone a large tilt with respect to the rotation axis. If the base polytropic is now lowered to 2.0 instead of 3.0, the same transition to non-axisymmetric large-scale cyclic dynamo mode takes place, but this time without the earlier axisymmetric phase characterizing the simulation of Fig. 2.12.

At the very least, these numerical experiments indicate that the structure of the stable layers affects the long term stability of the various types of large-scale cyclic dynamo modes that can materialize in these EULAG-MHD simulations. But how about the polarity reversal taking place in the more solar-like axisymmetric mode of large-scale dynamo action arising in the millenium simulation? The following “global dynamo scenario” is consistent with all analyses presented in this paper, as well as with the more geometrical restrictive simulations of [30] and [43]:

1. Dynamo action is driven primarily within the convection zone, through the differential rotation and turbulent electromotive force materializing therein. This is coherent with the analyses of [42] and [45], which indicate a mode of large-scale dynamo action resembling the so-called $\alpha^2\Omega$ dynamos of mean-field theory;
2. Downward pumping of the magnetic field produced in the convecting layers leads to the buildup of strong zonally-aligned magnetic field bands in the overshoot layer and upper reaches of the underlying stably stratified fluid layer, where further am-

plification of the toroidal magnetic component takes place through shearing of the poloidal magnetic field by differential rotation; downward pumping is observed in virtually all extant MHD simulations of solar convection, and differential rotation shear is a key “ingredient” of most extant solar cycle models;

3. Once the toroidal magnetic field bands in the stable layers reach sufficient strength, likely of the order of a few tenths of Tesla, MHD instabilities set in, destabilizing the magnetic field bands and accelerating their dissipation;
4. Meanwhile the global magnetic polarity has reversed in the convecting layers, and downwards pumping of magnetic field of opposite polarity to that having formerly built up in the stable layer begins, eventually leading to polarity reversals therein as well, closing the dynamo loop towards step 1 above.

Additional simulations and analyses are underway to further validate this scenario, which at this juncture remains speculative but plausible. From the point of view of kinematic mean-field and mean-field-like dynamo models of the solar cycle, the instabilities for which we have presented evidence in this paper can be considered as contributing to the enhanced turbulent magnetic diffusivity that is essential for such dynamo models to produce solar-like cycles with decadal periods.

Acknowledgements

We wish to thank Antoine Strugarek for useful discussions on the Tayler instability. The EULAG-MHD “millenium simulation” was originally designed and executed by M. Ghizaru. Nicolas Lawson wishes to thanks the physics department of University de Montréal for the award of a graduate fellowship. P. Charbonneau is supported primarily by a Discovery Grant from the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada. All simulations reported upon in this paper were performed on the computing infrastructures of Calcul Québec, a member of the Compute Canada consortium.

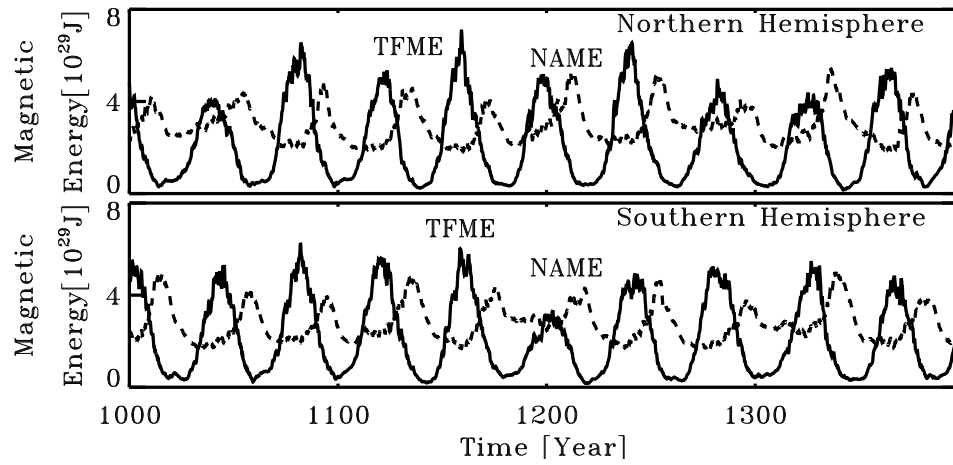


Figure 2.8: Time series of the volume-integrated magnetic energy contained in the axisymmetrical toroidal field (TFME; solid line) and the total non-axisymmetrical field (NAME; dotted line) in the stable zone of the EULAG-MHD millenium simulation, for the Northern (top) and Southern (bottom) hemispheres. Compare to Figure 2 in [30].

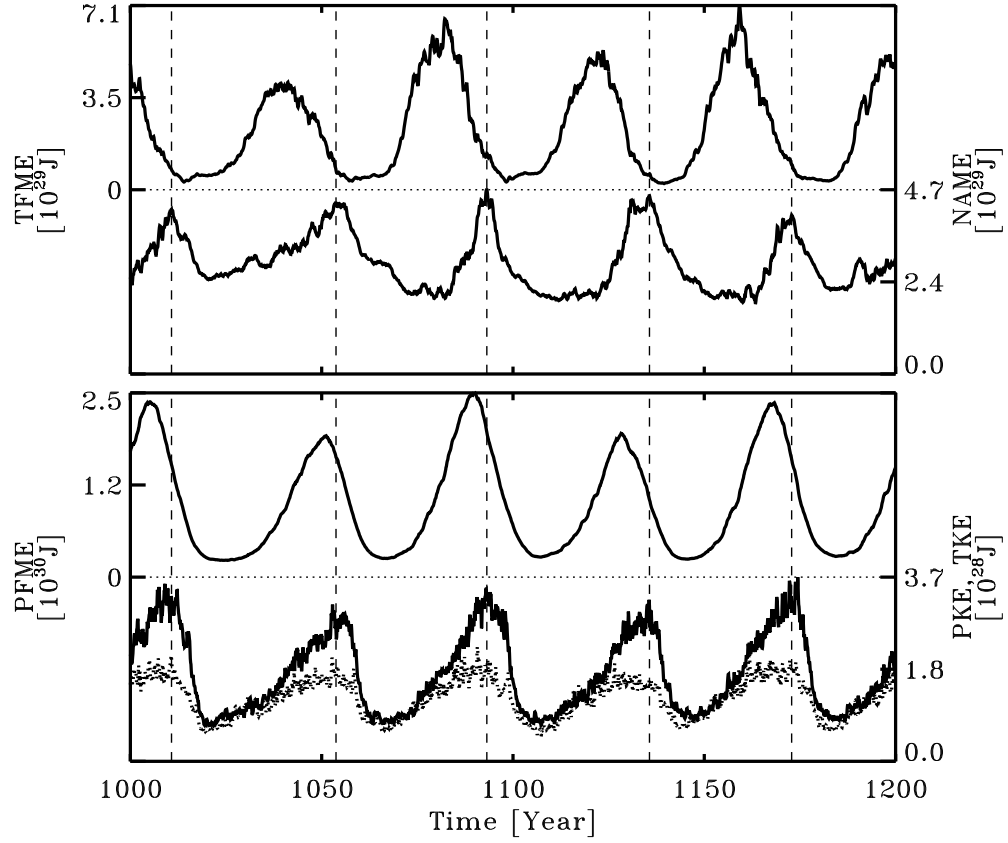


Figure 2.9: The top panel shows a 200yr closeup of Fig. 2.8 for the N-hemisphere, and the bottom shows the corresponding time series for the PKE (solid line) and TKE (dotted line) flow energy proxies defined through eqs. (2.17)–(2.18). The poloidal magnetic proxy PFME (viz. eq. 2.16) is also shown. The vertical dashed lines indicate the epochs of peak NAME. Note the in-phase variations of PKE and TKE with NAME.

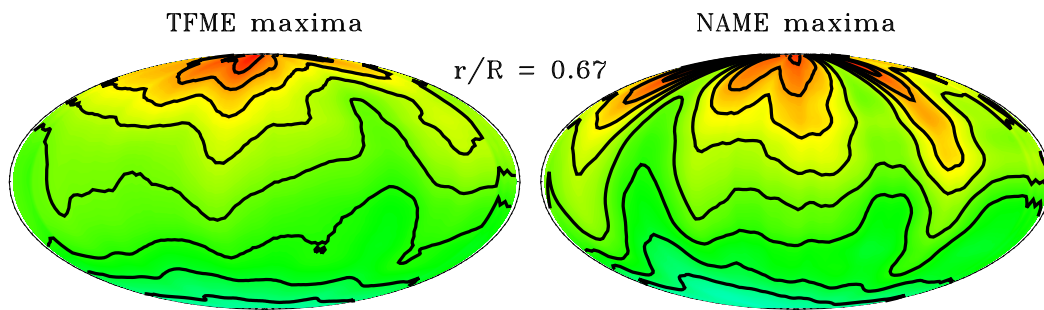


Figure 2.10: Magnetic fieldlines on the spherical surface $r/R = 0.67$, well within the stable layer. The left diagram is extracted at an epoch of magnetic cycle maximum, while that on the right is for a time of peak NAME, i.e., at the phase of maximal growth of the non-axisymmetric magnetic component. On these Mollweide projections a purely toroidal magnetic field would have all its fieldlines oriented horizontally. Compare to Fig. 3 in [30].

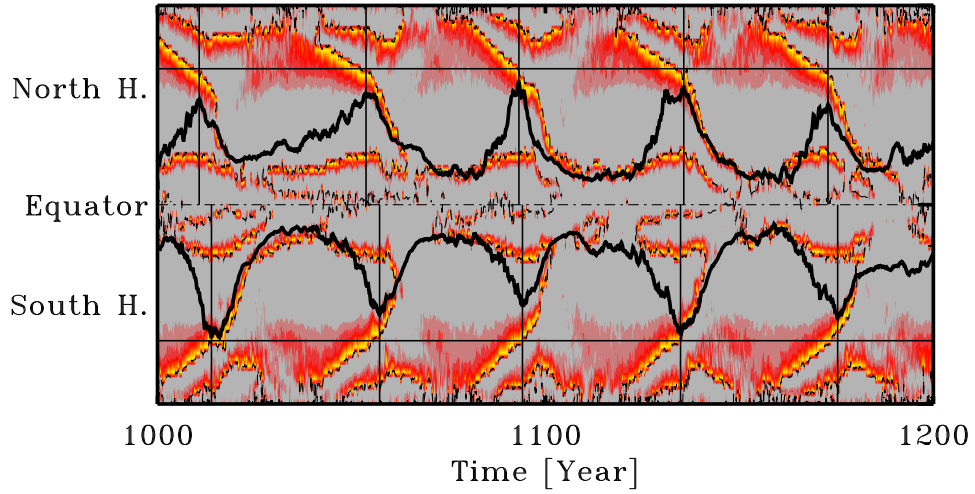


Figure 2.11: Time-latitude color rendering of the $m = 1$ instability criterion as given by eq. (2.22), based on the magnetic field extracted at depth $r/R = 0.696$, at the top of the stable layer. Areas in gray are stable, and red-to-yellow represents increased instability. This 200yr time segment spans five magnetic half-cycles, and is the same as for the time-latitude of the axisymmetric toroidal field plotted on Fig. 2.1D. The thick black lines are the NAME time series, that for the S-hemisphere plotted as negative, and the thin vertical black line indicate epochs of peak NAME. The thin horizontal black lines are drawn at $\pm 61^\circ$ latitude, corresponding to the poleward extent of the strong ($\langle B_\phi \rangle \geq 0.1$ T) magnetic field bands building up in the stable layer. The dashed black line shows the $\langle B_\phi \rangle = 0$ isocontour.

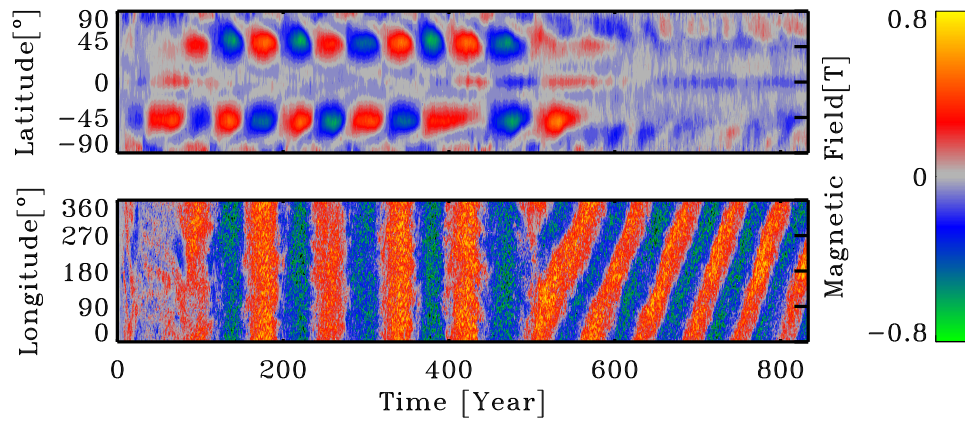


Figure 2.12: Time-latitude diagram of the zonally-averaged toroidal magnetic field at $r/R = 0.711$ in a EULAG-MHD simulation identical to the millenium simulation, except for a more strongly subadiabatic polytropic profile in the stable layer. The bottom panel shows a time-longitude diagram extracted at $r/R = 0.711$ and 45° latitude North, in the same simulation. The apparent disappearance of the cycle on the top panel is a consequence of the dynamo switching to a non-axisymmetric large-scale mode, still undergoing polarity reversals with respect to its own symmetry axis (see text).

CHAPITRE 3

CONCLUSION

Les instabilités MHD au sein du mécanisme solaire sont un sujet avec un riche historique qui récemment prend de plus en plus d'ampleur dans la littérature et comme tout sujet récent, il fourmille de questions sans réponses qui rendent son étude d'autant plus intéressante. La limitation principale est encore le modèle numérique utilisé et sa capacité à reproduire un comportement réaliste cyclique semblable aux observations. Évidemment, l'étude d'un processus MHD qui a un effet sur le mécanisme solaire requiert un modèle qui produit un cycle magnétique régulier qui, comme mentionné dans l'introduction, est très nouveau. Cumulées à ceci, les instabilités MHD n'ont pas une signature simple et leur détection peut souvent être difficile et complexe, car il est impossible de simplement les "voir" et leur effet géométrique est subtil à l'intérieur des simulations.

Comme vu dans l'article, on remarque que l'étude des instabilités a été faite en utilisant plusieurs types de modèles numériques différents. Les travaux de Miesch [30] (travaux qui ont inspiré notre étude) se basent sur un modèle en 2.5D de couches 2D stratifiés avec des variables forcées, comme le champ magnétique poloidal et la rotation différentielle. Rogers [43], utilise un modèle complètement 2D en latitude-rayon, simulant donc des effets purements axisymétriques. En contraste, notre modèle est complètement 3D et impose seulement un forçage thermique pour supporter la convection, ayant les phénomènes désirés qui se développent naturellement. En sorte, notre référence est plus proche de la réalité que les deux modèles précédents, mais leur méthodologie a dû être adaptée pour que l'on puisse l'appliquer à notre outil.

L'utilisation du proxy introduit par Miesch [30] a montré que malgré les différences, on retrouve bel et bien une signature très similaire d'une instabilité non-axisymétrique évoluant dans notre système. De plus, avec l'utilisation de nos variables axisymétriques pour les mêmes conditions, on remarque aussi une signature d'instabilité comparable à celle de Rogers [43]. Ceci nous prouve donc que les effets observés dans les simu-

lations plus limitées se retrouvent aussi dans l'évolution globale d'un système comme EULAG-MHD. En sorte, le déphasage de l'évolution de l'instabilité avec le cycle solaire, la migration équatoriale de la zone d'instabilité ainsi que les autres caractéristiques plus spécifiques sont cohérentes à travers les différences des modèles numériques.

Bien que les instabilités soient identifiées et caractérisées dans différents modèles, leurs effets restent encore relativement flous. Il est difficile de confirmer que le développement de l'instabilité est effectivement essentiel, comme on le croit, ou s'il n'est que superposé aux autres effets actifs qui tendent à détruire le champ magnétique. De plus, même avec un proxy fonctionnel, il est encore difficile d'établir le lien de causalité entre certaines occurrences. Effectivement, la question de causalité est une question difficile qui revient encore et toujours dans ce genre d'analyse non linéaire où les effets de rétroactions sont souvent non négligeables et où nous n'avons jamais directement accès au profil initialement instable.

Néanmoins, l'information de cette recherche nous a permis d'émettre un scénario plausible qui est une exposition des effets d'instabilité sur le mécanisme du cycle solaire. Évidemment, il est important de comprendre que ce scénario se veut extrêmement sensible aux nouvelles informations qui vont indubitablement faire surface dans les prochaines années. Premièrement, il serait essentiel de caractériser, plus spécifiquement quel genre d'instabilité nous détectons ainsi que la manière qu'elle entrepose l'énergie qu'elle puise du champ magnétique et de la rotation. De plus, être capable de situer l'instabilité plus précisément à l'intérieur du domaine pourrait nous donner des indices plus importants sur son mécanisme. Finalement, il serait important de pouvoir établir quantitativement l'effet des instabilités MHD sur la période du cycle solaire afin de pouvoir améliorer le degré de réalisme des simulations EULAG-MHD qui est l'outil principal pour l'étude de la physique solaire au GRPS. Effectivement, EULAG-MHD simule une période solaire trop longue ainsi qu'une activité solaire concentré à des latitudes trop élevées.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Balbus, S. A., & Hawley, J. F., 1991, *ApJ*, 376, 214
- [2] Beaudoin, P., Charbonneau, P., Racine, E., & Smolarkiewicz, P. K., 2013, *Solar Phys.*, 282, 335
- [3] Beaudoin, P., Simard, C., Cossette, J.-F., & Charbonneau, P., 2014, *ApJ*, In Preparation
- [4] Braithwaite, J. 2006, *Astronomy and Astrophysics*, 449, 451
- [5] Braithwaite, J., & Nordlund, A., 2006, *Astronomy and Astrophysics*, 450, 1077
- [6] Brown, B. P., Miesch, M. S., Browning, M. K., Brun, A. S., & Toomre, J., 2011, *ApJ*, 731, 69
- [7] Brun, A. S., & Zahn, J.-P. 2006, *Astronomy and Astrophysics*, 457, 665
- [8] Cally, P. S. 2003, *ApJ*, 580, 1190
- [9] Charbonneau, P., Christensen-Dalsgaard, J., Henning, R., Larsen, R. M., Schou, J., Thompson, M. J., & Thompson, M. J., 1999, *ApJ*, 527, 445
- [10] Charbonneau, P., 2010, *Living Rev. Solar Phys.*, 7, 3
- [11] Charbonneau, P., 2013, *Journal of Physics*, 440, 012014
- [12] Christensen-Dalsgaard, J., 2002, *Rev. Mod. Phys.*, 74, 1073-1129
- [13] Cossette, J.-F., Charbonneau, P., & Smolarkiewicz, P. K., 2013, *ApJL*, 777, L29
- [14] Dikpati, M., & Gilman, P. A., 2001, *ApJ*, 512, 417
- [15] Domaradzki, J. A., Xiao, Z., & Smolarkiewicz, P. K., 2003, *Phys. of Fluids*, 15, 12, 3890
- [16] Dubé, C., & Charbonneau, P., 2013, *ApJ*, 775, 69

- [17] Fan, Y., 2009, Astron. Soc. Pacific, San Francisco, 489
- [18] Ghizaru, M., Charbonneau, P., & Smolarkiewicz, P.K., 2010, *ApJL*, 715, L133–L137
- [19] Gilman, P. A., & Fox, P. A., 1997, *ApJ*, 484, 439
- [20] Gilman, P. A., & Rempel, M., 2003, *ApJ*, 596, 680
- [21] Gilman, P. A., Dikpati, M., & Miesch, M. S. 2007, *ApJS*, 170, 203
- [22] Goossens, M., Biront, D., & Tayler, R. J., 1981, *Ap&SS*, 75, 521
- [23] Hathaway, D. H., 2010, *Living Rev. Solar Phys.*, 3, 1
- [24] Hathaway, D. H., Upton, L., & Colegrove, O., 2013, *Science*, 342, 1217
- [25] Howe, R., 2009, *Living Rev. Solar Phys.*, 6, 1
- [26] Käpylä, P. J., Mentere, M. J., & Brandenburg, A., 2012, *ApJL*, 755, L22
- [27] Lipps, F. B., & Hemler, R. S., 1982, *Journal of Atm. Sci.*, 39, 2192
- [28] McIntosh, S. W., Xin, W., Robert, J. L., & Scherrer, P. H. 2014, arXiv :1403.0692 (accepted in *ApJL*)
- [29] Miesch, M. S., & Gilman, P. A. 2004, *Solar Physics*, 220, 287
- [30] Miesch, M. S. 2007, *ApJ*, 658, L131
- [31] Miesch, M. S., & Toomre, J. 2009, *Annual Rev. of Fluid. Dyn.*, 41, 317
- [32] Mitalas, R., & Sills, K. R., 1992, *ApJ*, 401, 759
- [33] Nelson, N. J., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J., 2013, *ApJ*, 762, 73
- [34] Ossendrijver, M., 2000, *Astron. Astrophys.*, 359, 364

- [35] Ossendrijver, M., 2000, *Astron. Astrophys.*, 359, 1205
- [36] Parker, E. N., 1955, *ApJ*, 122, 293
- [37] Parker, E. N., 1955, *ApJ*, 121, 491
- [38] Passos, D., & Charbonneau, P., 2014, *Astronomy and Astrophysics*, 518, A113
- [39] Pitts, E., & Tayler, R. J., 1986, *MNRAS*, 216, 139
- [40] Prusa, J. M., & Smolarkiewicz, P. K., 2003, *JCP*, 190, 601
- [41] Prusa, J. M., Smolarkiewicz, P. K., & Wyszogrodzki, 2008, *Comp. and Fluids*, 37, 1193-1207
- [42] Racine, E., Charbonneau, P., Ghizaru, M., Bouchat, A., & Smolarkiewicz, P. K., 2011, *ApJ*, 735, 46
- [43] Rogers, T. M. 2011, *ApJ*, 735, 100
- [44] Schmitt, D., & Schüssler, M., 1989, *Astron. Astrophys.*, 424, 349
- [45] Simard, C., Charbonneau, P., & Bouchat, A. 2013, *ApJ*, 768, 16
- [46] Smolarkiewicz, P. K., & Charbonneau, P., 2013, *JCP*, 236, 608
- [47] Spiegel, E. A., & Zahn, J.-P., 1992, *Astronomy and Astrophysics*, 256, 106
- [48] Spruit, H. C. 1999, *Astronomy and Astrophysics*, 349, 189
- [49] Spruit, H. C., 2002, *Astronomy and Astrophysics*, 381, 923
- [50] Steenbeck, M., & Krause, F., 1969, *Astronomische Nachrichten*, 291, 49
- [51] Stenflo, J. O., & Kosovichev, A. G., 2012, *ApJ*, 745, 29
- [52] Tayler, R. J., 1973, *MNRAS*, 161, 365
- [53] Tobias, S. M., Brummell, N. H., Clune, T. L., & Toomre, J., 2011, *ApJ*, 509, 1183
- [54] Watson, M., 1981, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 16, 285